1-2　二項分布

主題一　獨立事件

1. 兩事件為獨立事件：設事件 A 與事件 B 是樣本空間的兩事件。
   若 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$，則稱 A，B 為獨立事件，否則稱為相依事件。
2. 三事件為獨立事件：當三事件 A，B，C 同時滿足下列四項條件：
   (1) $P(A\cap B)=P(A)P(B)$　(2) $P(B\cap C)=P(B)P(C)$
   (3) $P(A\cap C)=P(A)P(C)$　(4) $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$
   稱 A，B，C 三事件為獨立事件。
3. 若 A，B 為獨立事件，則：
   (1) A'，B；(2) A，B'；(3) A'，B' 均為獨立事件。
4. 若 A，B，C 為獨立事件，則：
   (1) A'，B，C；(2) A，B'，C；(3) A，B，C'；(4) A'，B'，C；(5) A，B'，C'；
   (6) A'，B，C'；(7) A'，B'，C' 均為獨立事件。

例題1　兩個事件的獨立

投擲一顆公正骰子兩次，A 表第一次點數為偶數之事件，B 表兩次點數和為 3 的倍數之事件，C 表兩次點數和為 10 之事件，試判斷：

(1) A，B 兩事件是否為獨立事件？

(2) A，C 兩事件是否為獨立事件？

解　投擲一顆公正骰子兩次的樣本空間

$$S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

(1) $P(A)=\dfrac{18}{36}=\dfrac{1}{2}$

$B=\{(1,2),(2,1),(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1),(3,6),(4,5),(5,4),(6,3),(6,6)\}$

$P(B)=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$

而 $A\cap B=\{(2,1),(2,4),(4,2),(4,5),(6,3),(6,6)\}$

$\because P(A\cap B)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=P(A)P(B)$　$\therefore A$，B 為獨立事件

(2) $C=\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$，$P(C)=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$

$A\cap C=\{(4,6),(6,4)\}$，$P(A\cap C)=\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$

$\because P(A\cap C)\neq P(A)P(C)$　$\therefore A$，C 為相依事件

類題

連續投擲一枚均勻硬幣兩次，定義三事件如下：事件 A：第一次出現正面；事件 B：第二次出現正面；事件 C：至少出現一次正面，試判斷：

(1) A，B 兩事件是否為獨立事件？　(2) A，C 兩事件是否為獨立事件？

解　投擲一枚均勻硬幣兩次的樣本空間

$S=\{$（正，正），（正，反），（反，正），（反，反）$\}$

(1) $P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{1}{2}$，$P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$

$\because P(A\cap B)=P(A)P(B)$　$\therefore A$，B 為獨立事件

(2) $P(C)=\dfrac{3}{4}$，$P(A\cap C)=\dfrac{1}{2}$，而 $P(A)P(C)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{8}$

$\because P(A\cap C)\neq P(A)P(C)$　$\therefore A$，C 為相依事件

例題2　三個事件的獨立

投擲一枚均勻的硬幣三次，A 代表第一次是正面的事件，B 代表第二次是正面的事件，C 代表三次皆同面的事件，試判斷 A，B，C 三事件是否為獨立事件。

注意　兩兩獨立，但三者不一定獨立。

解　$A=\{$（正，正，正），（正，正，反），（正，反，正），（正，反，反）$\}$

$B=\{$（正，正，正），（正，正，反），（反，正，正），（反，正，反）$\}$

$C=\{$（正，正，正），（反，反，反）$\}$

$\therefore P(A)=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{1}{2}$，$P(C)=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$

又 $A\cap B=\{$（正，正，正），（正，正，反）$\}$，$B\cap C=\{$（正，正，正）$\}$，

$A\cap C=\{$（正，正，正）$\}$

$\therefore P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}=P(A)P(B)$，$P(B\cap C)=\dfrac{1}{8}=P(B)P(C)$，

$P(A\cap C)=\dfrac{1}{8}=P(A)P(C)$

故 A，B，C 兩兩獨立，而 $A\cap B\cap C=\{$（正，正，正）$\}$

$\because P(A\cap B\cap C)=\dfrac{1}{8}\neq P(A)P(B)P(C)$　$\therefore A$，B，C 三事件不為獨立事件

類題

投擲一枚均勻的硬幣三次，A 代表第一次是正面的事件，B 代表第二次是反面的事件，C 代表第三次是正面的事件，試判斷 A，B，C 三事件是否為獨立事件？

解　$A=\{$（正，正，正），（正，正，反），（正，反，正），（正，反，反）$\}$

$B=\{$（正，反，正），（正，反，反），（反，反，正），（反，反，反）$\}$

$C=\{$（正，正，正），（正，反，正），（反，正，正），（反，反，正）$\}$

$\therefore P(A)=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{1}{2}$，$P(C)=\dfrac{1}{2}$

又 $A\cap B=\{$（正，反，正），（正，反，反）$\}$，$B\cap C=\{$（正，反，正），

（反，反，正）}

$A\cap C$＝{（正，正，正），（正，反，正）}

$\therefore P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}=P(A)P(B)$，$P(B\cap C)=\dfrac{1}{4}=P(B)P(C)$，

$P(A\cap C)=\dfrac{1}{4}=P(A)P(C)$

故 A，B，C 兩兩獨立，而 $A\cap B\cap C$＝{（正，反，正）}

$\because P(A\cap B\cap C)=\dfrac{1}{8}=P(A)P(B)P(C)$　$\therefore A$，B，C 三事件互為獨立事件

主題二重複試驗

1. 白努利試驗：
   一個結果僅有兩種情形的隨機試驗。習慣上，將這兩種情形分別稱為「成功」或「失敗」。
2. 重複試驗：在相同條件下重複執行一個試驗。
3. 獨立重複試驗：
   在重複試驗中，每次結果互不影響稱為獨立重複試驗，本教材中只討論白努利試驗的獨立重複試驗。
4. 獨立重複試驗的機率：
   假設一白努利試驗成功的機率為 p，則獨立重複試驗 n 次中，恰出現 k 次成功的機率為
   $C_k^n p^k(1-p)^{n-k}$。

例題3　獨立重複試驗的機率

一袋中有 2 顆紅球與 4 顆白球，由袋中取 1 球 4 次，取後放回，假設每次取球的結果互相獨立，試問 4 次取出的球中

(1) 恰有 3 次紅球的機率為何？　(2) 至少有 3 次紅球的機率為何？

注意　獨立重複試驗 n 次中，恰出現 k 次成功的機率為 $C_k^n p^k(1-p)^{n-k}$。

解　(1) 將抽取到紅球視為成功，則每次取球成功的機率為 $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$，失敗的機率為 $\dfrac{2}{3}$

「4 次取出的球中恰有 3 次紅球」表示在此重複試驗中恰有 3 次成功，1 次失敗

因此其方法數共 $\dfrac{4!}{3!1!}=C_3^4$ 種，而每一種情形的機率都是 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)$

故 4 次取出的球中恰有 3 次紅球的機率為 $C_3^4\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{8}{81}$

(2)（至少有 3 次紅球的機率）＝（恰有 3 次紅球的機率）＋（恰有 4 次紅球的機率）

而恰有 4 次紅球的機率為 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^4=\dfrac{1}{81}$

$\therefore$至少有 3 次紅球的機率為$C_3^4\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{8}{81}+\frac{1}{81}=\frac{9}{81}=\frac{1}{9}$

類題

投擲三枚相同有正、反兩面的均勻硬幣，若三枚均出現同一面，則可得一分，否則得零分。今連投 4 次，若機會均等且假設每次投擲的結果互相獨立，試求：

(1) 得 2 分的機率為何？　(2) 至少得 2 分的機率為何？

解　(1) 投擲三枚均勻的硬幣，若三枚均出現同一面視為成功

則成功的機率為$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$，失敗的機率為$\frac{3}{4}$

「連投 4 次，恰得 2 分」表示在此重複試驗中恰有 2 次成功，2 次失敗

因此其方法數共$\frac{4!}{2!2!}=C_2^4$種，而每一種情形的機率都是$\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2$

故連投 4 次得 2 分的機率為$C_2^4\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$

(2)（至少得 2 分的機率）＝（得2分的機率）＋（得3分的機率）＋（得4分的機率）

$\therefore$至少得 2 分的機率為$C_2^4\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2+C_3^4\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)+C_4^4\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{27}{128}+\frac{3}{64}+\frac{1}{256}=\frac{67}{256}$

主題三　二項分布及其性質

假設白努利試驗成功的機率為 p，失敗的機率為 $q=1-p$，其中 $p\geq 0$，$q\geq 0$。令隨機變數 X 的取值表示此試驗獨立重複試驗 n 次中成功的次數，則：

(1) X 的機率質量函數為 $P(X=k)=C_k^n p^k q^{n-k}$，其中 $k=0，1，2，\cdots\cdots，n$

此隨機變數 X 的機率分布稱為二項分布，記為 $B(n，p)$。

(2) X 的機率分布如下表：

X	0	1	……	k	……	n
p_X	$C_0^n p^0 q^n$	$C_1^n p^1 q^{n-1}$	……	$C_k^n p^k q^{n-k}$	……	$C_n^n p^n q^0$

(3) X 的期望值為 $E(X)=np$。

(4) X 的變異數為 $Var(X)=npq$。

(5) X 的標準差為$\sigma=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{npq}$。

例：假設白努利試驗成功的機率為 p，失敗的機率為 $q=1-p$，其中 $p\geq 0$，$q\geq 0$。令隨機變數 X 的取值表示此試驗獨立重複試驗 2 次中成功的次數，則 X 的機率分布如下表：

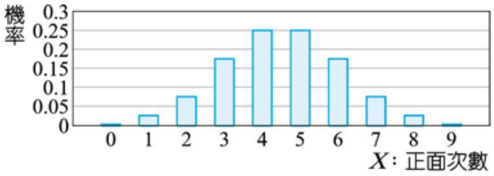
X	0	1	2
p_X	$C_0^2 p^0 q^2=q^2$	$C_1^2 p^1 q^1=2pq$	$C_2^2 p^2 q^0=p^2$

X 的期望值為 $E(X)=0\times q^2+1\times 2pq+2\times p^2=2p(p+q)=2p$

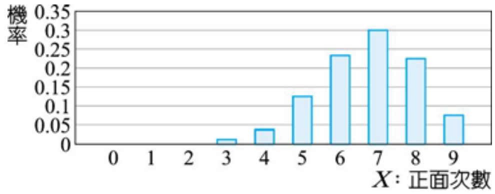
X 的變異數為 $Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=0^2\times q^2+1^2\times 2pq+2^2\times p^2-(2p)^2=2pq$

補充：(1) 一般二項分布機率值 $P(X=k)$ 隨著成功次數 k 的增加而變大，到某最高點後就開始下降。

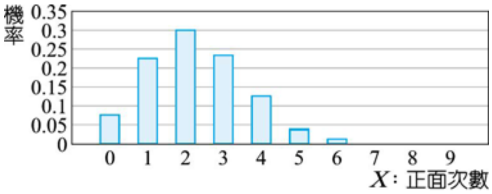
(2) 如果 $p=0.5$，則圖形左右對稱；如果 $p>0.5$，則圖形左偏；如果 $p<0.5$，則圖形右偏。例如：丟擲一枚硬幣（不一定平均）9 次，令隨機變數 X 表示出現正面的次數。

①


$X\sim B\left(9,\frac{1}{2}\right)$，機率質量函數圖形左右對稱

②


$X\sim B\left(9,\frac{3}{4}\right)$，機率質量函數圖形左偏

③


$X\sim B\left(9,\frac{1}{4}\right)$，機率質量函數圖形右偏

例題4　二項分布的機率與期望值

投擲一顆公正的骰子 3 次，若隨機變數 X 代表出現點數為 6 的次數，試求：

(1) 隨機變數 X 的機率分布與機率質量函數圖。

(2) 隨機變數 X 的期望值。

注意　期望值 $E(X)=\sum_{k=1}^{n}x_k p_k$ 。

解　(1) 由題意知隨機變數 X 可能的取值為 0，1，2，3

其機率分布與機率質量函數圖如下：

X	0	1	2	3
p_X	$C_0^3\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$	$C_1^3\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{75}{216}$	$C_2^3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{15}{216}$	$C_3^3\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$

(2) 期望值 $E(X)=\sum_{k=1}^{4}x_k p_k=0\times\frac{125}{216}+1\times\frac{75}{216}+2\times\frac{15}{216}+3\times\frac{1}{216}=\frac{108}{216}=\frac{1}{2}$（次）

類題

投擲一枚均勻硬幣 4 次，令隨機變數 X 表示正面出現的次數，試求：

(1) 隨機變數 X 的機率分布與機率質量函數圖。

(2) 隨機變數 X 的期望值。

解　(1) 由題意知隨機變數 X 可能的取值為 0，1，2，3，4，其機率分布與機率質量函數圖如下：

X	0	1	2	3	4
p_X	$C_0^4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$	$C_1^4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{16}$	$C_2^4\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16}$	$C_3^4\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{16}$	$C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

(2) X 的期望值為 $E(X)=\sum_{k=1}^{5}x_k p_k=0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{4}{16}+2\times\frac{6}{16}+3\times\frac{4}{16}+4\times\frac{1}{16}=\frac{32}{16}=2$（次）

例題5　二項分布的期望值、變異數與標準差（一）

一袋中有 2 顆紅球與 1 顆黑球，每次從袋中抽取兩球，取後放回，共取 3 次，令隨機變數 X 表示抽到兩球都是紅球的次數，試求隨機變數 X 的期望值、變異數與標準差。

注意　隨機變數 X 的變異數為 $\sum_{k=1}^{n}(x_k-E(X))^2 p_k$，標準差為 $\sqrt{Var(X)}$。

解　由題意知隨機變數 X 可能的取值為 0，1，2，3

袋中抽取兩球，兩球皆為紅球的機率為 $\frac{C_2^2}{C_2^3}=\frac{1}{3}$，故其機率分布如下表：

X	0	1	2	3
p_X	$C_0^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$	$C_1^3\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{12}{27}$	$C_2^3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{6}{27}$	$C_3^3\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

X 的期望值為 $E(X)=\sum_{k=1}^{4}x_k p_k=0\times\frac{8}{27}+1\times\frac{12}{27}+2\times\frac{6}{27}+3\times\frac{1}{27}=1$（次）

X 的變異數為 $Var(X)=(0-1)^2\times\frac{8}{27}+(1-1)^2\times\frac{12}{27}+(2-1)^2\times\frac{6}{27}+$

$(3-1)^2\times\frac{1}{27}=\frac{2}{3}$

X 的標準差為$\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$（次）

類題

假設生男、生女的機率均為$\frac{1}{2}$。對有 3 個小孩的家庭以隨機變數 X 表示小孩中女生的數量，試求隨機變數 X 的期望值、變異數與標準差。

解　由題意知隨機變數 X 可能的取值為 0，1，2，3，其機率分布如下表：

X	0	1	2	3
p_X	$C_0^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$	$C_1^3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$	$C_2^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$	$C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

X 的期望值為$E(X)=\sum_{k=1}^{4}x_k p_k=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$（個）

X 的變異數為$Var(X)=\left(0-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{1}{8}+\left(1-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{3}{8}+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{3}{8}+\left(3-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{1}{8}$

$$=\frac{9}{32}+\frac{3}{32}+\frac{3}{32}+\frac{9}{32}=\frac{3}{4}$$

X 的標準差為$\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$（個）

例題6　二項分布的期望值、變異數與標準差（二）

設隨機變數 X 的取值表示投擲一顆骰子 3 次後，「點數 6」出現的總次數，若此骰子為“非公正”的骰子，出現「點數 6」的機率為 $p=\frac{1}{4}$，試求出隨機變數 X 的機率分布，並求 X 的期望值與標準差。

注意　投 n 次骰子中，恰出現 k 次「點數 6」的機率為$C_k^n p^k(1-p)^{n-k}$。

解　此隨機變數 X 的機率分布為二項分布 $B\left(3,\frac{1}{4}\right)$，其機率分布如下表：

X	0	1	2	3
p_X	$C_0^3\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$	$C_1^3\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$	$C_2^3\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{64}$	$C_3^3\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$

X 的期望值為$E(X)=0\times\frac{27}{64}+1\times\frac{27}{64}+2\times\frac{9}{64}+3\times\frac{1}{64}=\frac{48}{64}=\frac{3}{4}$（次）

X 的變異數為$Var(X)=\left(0-\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{27}{64}+\left(1-\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{27}{64}+\left(2-\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{9}{64}+\left(3-\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{64}$

$$=\frac{243}{1024}+\frac{27}{1024}+\frac{225}{1024}+\frac{81}{1024}=\frac{576}{1024}=\frac{9}{16}$$

X 的標準差為$\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$（次）

類題

設隨機變數 X 的取值表示投擲一枚硬幣 4 次後，正面出現的總次數，若此硬幣為“非均勻”的硬幣，出現正面的機率為 $p=\frac{2}{3}$，試求出隨機變數 X 的機率分布，並求 X 的期望值與標準差。

解　此隨機變數 X 的機率分布為二項分布 $B\left(4,\frac{2}{3}\right)$，其機率分布如下表：

X	0	1	2	3	4
p_X	$C_0^4\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$	$C_1^4\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$	$C_2^4\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{24}{81}$	$C_3^4\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{81}$	$C_4^4\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$

X 的期望值為 $E(X)=0\times\frac{1}{81}+1\times\frac{8}{81}+2\times\frac{24}{81}+3\times\frac{32}{81}+4\times\frac{16}{81}=\frac{216}{81}=\frac{8}{3}$（次）

X 的變異數為

$$Var(X)=\left(0-\frac{8}{3}\right)^2\times\frac{1}{81}+\left(1-\frac{8}{3}\right)^2\times\frac{8}{81}+\left(2-\frac{8}{3}\right)^2\times\frac{24}{81}+\left(3-\frac{8}{3}\right)^2\times\frac{32}{81}+\left(4-\frac{8}{3}\right)^2\times\frac{16}{81}$$

$$=\frac{64}{729}+\frac{200}{729}+\frac{96}{729}+\frac{32}{729}+\frac{256}{729}=\frac{8}{9}$$

X 的標準差為 $\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$（次）

例題7　應用問題（一）

某次測驗，試卷上共有 10 題單選題，每題有 5 個選項，而且每題恰有一個正確的標準答案。維寧在每題的 5 個選項中隨機選擇一個選項作答，每題答對與否互相獨立。

(1) 試求維寧在這次測驗答對題數的期望值與標準差。

(2) 若每題答對給 10 分，答錯不給分亦不倒扣分數，總分 100 分，試求維寧在這次測驗成績的期望值。

注意　(1) E（X）＝np，$\sqrt{Var(X)}=\sqrt{npq}$；(2) E（aX）＝aE（X）。

解　(1) 由題意可知維寧每題答對的機率為 $\frac{1}{5}$

設隨機變數 X 的取值表示維寧答對的題數，則 X 的機率分布為二項分布 $B\left(10,\frac{1}{5}\right)$

因此維寧在這個測驗中答對題數的期望值為 E（X）＝$10\times\frac{1}{5}$＝2（題）

答對題數的標準差為 $\sqrt{Var(X)}=\sqrt{10\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{8}{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$（題）

(2) 維寧的成績期望值為 E（$10X$）＝$10E$（X）＝10×2＝20（分）

類題

某次測驗，試卷上有 50 題是非題，每題非○即×。國源在○與×中隨機選擇一個作答，

(1) 試求國源在這次測驗答對題數的期望值與標準差。

(2) 若每題答對給 2 分，答錯不給分亦不倒扣分數，總分 100 分，試求國源在這次測驗成績的期望值。

解　(1) 由題意可知國源每題答對的機率為$\frac{1}{2}$

設隨機變數 X 的取值表示國源答對的題數，則 X 的機率分布為二項分布 $B\left(50,\frac{1}{2}\right)$

因此國源在這個測驗中答對題數的期望值為 $E(X)=50\times\frac{1}{2}=25$（題）

答對題數的標準差為$\sqrt{Var(X)}=\sqrt{50\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$（題）

(2) 國源的成績期望值為 $E(2X)=2E(X)=2\times25=50$（分）

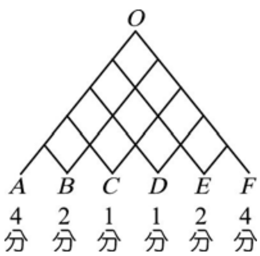
例題8　應用問題（二）

俊明在夜市看到一個遊戲，其規則如下：

由 O 出發，在每一個交叉點處擲一均勻硬幣，若出現正面則向右下走一格，出現反面則向左下走一格，直到到達 A，B，C，D，E，F 其中一點，每點可獲得的分數如下圖所示，試求：

(1) 玩 1 次所得分數的期望值與標準差。

(2) 玩 2 次所得分數的期望值。



注意　注意從 O 執行至 A，B，C，D，E，F 的任一點都須執行 5 次，若向右下 k 次且向左下（$5-k$）次可達某點，則最後到達某點的機率為$C_k^5\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{5-k}$。

解　(1) 設隨機變數 X 的取值表示玩一次所得分數，則

$$P(X=1)=C_2^5\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+C_3^5\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{8},$$

$$P(X=2)=C_1^5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4+C_4^5\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{16}$$

$$P(X=4)=C_0^5\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5+C_5^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{16}$$

可得隨機變數 X 的機率分布如右表：

X 的期望值為 $E(X)=1\times\frac{5}{8}+2\times\frac{5}{16}+4\times\frac{1}{16}=\frac{3}{2}$（分）

X	1	2	4
p_X	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$

X 的變異數為 $Var(X)=\left(1-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{5}{8}+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{5}{16}+\left(4-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{1}{16}=\frac{5}{32}+\frac{5}{64}+\frac{25}{64}=\frac{5}{8}$

X 的標準差為 $\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{5}{8}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$（分）

(2) 令隨機變數 Y 的取值表示玩 2 次所得分數的總和

由獨立重複試驗的期望值公式可知 $E(Y)=2E(X)=2\times\frac{3}{2}=3$（分）

故玩 2 次所得分數總和的期望值為 3 分

類題

承例題 8，試求俊明玩 4 次所得分數總和的期望值。

解　令隨機變數 Z 的取值表示玩 4 次所得分數的總和

由獨立重複試驗的期望值公式可知 $E(Z)=4E(X)=4\times\frac{3}{2}=6$（分）

故玩 4 次所得分數總和的期望值為 6 分

重要性：★★★★☆

1-2　段考實力演練

一、基礎題

1. 投擲一顆公正的骰子三次，以 A 表示第一次出現點數是 3 的事件，以 B 表示第二次出現點數是 4 的事件，以 C 表示第三次出現點數是 5 的事件，試判斷 A，B，C 三事件是否為獨立事件。

解　$P(A)=\frac{1}{6}$，$P(B)=\frac{1}{6}$，$P(C)=\frac{1}{6}$

而 $P(A\cap B)=\frac{1}{36}=P(A)P(B)$，

$P(B\cap C)=\frac{1}{36}=P(B)P(C)$，

$P(C\cap A)=\frac{1}{36}=P(C)P(A)$

又 $P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{216}=P(A)P(B)P(C)$

故 A，B，C 三事件為獨立事件

2. 投擲一顆公正的骰子三次，試求：

(1) 至少出現一次 6 點的機率。

(2) 恰出現兩次 6 點的機率。

(3) 至少出現兩次偶數點的機率。

解 此為三次獨立重複試驗

令隨機變數 X 表示三次試驗中出現 6 點的次數，故 X 的機率質量函數為

$$P(X=k)=C_k^3\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}\text{，}k=0\text{，}1\text{，}2\text{，}3$$

(1) 至少出現一次 6 點的機率為 $P(X\geq 1)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{91}{216}$

(2) 恰出現兩次 6 點的機率為 $P(X=2)=C_2^3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{72}$

(3) 擲一顆公正的骰子，出現偶數點的機率為 $\frac{1}{2}$。令隨機變數 Y 表示三次實驗中，至少出現兩次偶數點的次數

$$P(Y\geq 2)=P(Y=2)+P(Y=3)=C_2^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)+C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

3. 投擲一枚均勻硬幣，直到出現一次正面或五次反面為止，試求投擲次數的期望值。

解 令隨機變數 X 表示投擲的次數，其機率分布如下表：

X	1	2	3	4	5
p_X	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^5$

反反反反正　反反反反反

$$\therefore E(X)=\sum_{k=1}^{5}x_k p_k=1\times\frac{1}{2}+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+5\times 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{5}{16}=\frac{31}{16}\text{（次）}$$

4. 一袋中有 2 顆紅球與 1 顆白球，今每次隨機從袋中取出 2 球，取後放回，共取 5 次。令隨機變數 X 表示抽到兩球都是紅球的次數，試求：

(1) P（X＝3）。

(2) E（X）。

解 一次取 2 球，2 球皆為紅球的機率為 $\frac{C_2^2}{C_2^3}=\frac{1}{3}$

則 X 的機率分布為二項分布 $B\left(5,\frac{1}{3}\right)$

(1) $P(X=3)=C_3^5\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{40}{243}$

(2) $E(X)=np=5\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$（次）

5. 阿仁每天走同一條路上班，共需經過 5 個紅綠燈。設阿仁在每個路口會碰到紅燈的事件為$\dfrac{1}{3}$，而 5 個路口的紅綠燈是互相獨立的，試求：

(1) 至少碰到 4 次紅燈的機率。　(2) 阿仁上班時會碰到紅燈次數的期望值。

(3) 阿仁上班時會碰到紅燈次數的標準差。

解　此為 5 次獨立重複試驗，令隨機變數 X 表示 5 次試驗中，碰到紅燈的次數

故 X 的機率質量函數為 $P(X=k)=C_k^5\left(\dfrac{1}{3}\right)^k\left(\dfrac{3}{3}\right)^{5-k}$　$k=0，1，2，3，4，5$

(1) 至少碰到 4 次紅燈的機率為

$$P(X=4)+P(X=5)=C_4^5\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1+C_5^5\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{10}{243}+\frac{1}{243}=\frac{11}{243}$$

(2) 此機率分布為二項分布 $B\left(5,\dfrac{1}{3}\right)$

隨機變數 X 的期望值為 $E(X)=np=5\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$（次）

(3) 隨機變數 X 的標準差為 $\sqrt{Var(X)}=\sqrt{npq}=\sqrt{5\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$（次）

6. 投擲兩顆球到四個盒子中，每一球投入各盒的機會均等，令隨機變數 X 表示投入第一盒的球數，試求隨機變數 X 的期望值、變異數與標準差。

解　每顆球投入第一盒的機率為$\dfrac{1}{4}$所以此機率分布為二項分布 $B\left(2,\dfrac{1}{4}\right)$

而隨機變數 X 的期望值為 $E(X)=np=2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$（顆）

隨機變數 X 的變異數為 $Var(X)=npq=2\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{8}$

隨機變數 X 的標準差為 $\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$（顆）

7. 某生對於是非題的猜題答對率是平均每猜 2 題對 1 題。現有是非題 5 題，設隨機變數 X 代表該生猜對的題數，試問：

(1) 隨機變數 X 的期望值與標準差。

(2) 若猜對 3 題算及格，則該生及格的機率為何？

解　(1) X 的機率分布為二項分布 $B\left(5,\dfrac{1}{2}\right)$

因此該生猜對題數的期望值為 $E(X)=5\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$（題）

猜對題數的標準差為 $\sqrt{Var(X)}=\sqrt{5\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$（題）

(2) $P(X\geq 3)$

$=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$

$=C_3^5\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+C_4^5\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\left(\dfrac{1}{2}\right)+C_5^5\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{16}{32}=\dfrac{1}{2}$

二、進階題

8. 投擲一均勻的硬幣 4 次，令隨機變數 X 表示正面出現的次數，

(1) 試求 $E(X)$ 的值。

(2) 若出現一個正面給 5 元，出現反面給 3 元，令隨機變數 Y 表示所得到的金額，試求 $E(Y)$ 的值。

解　(1) X 可能的取值為 0，1，2，3，4，其機率分布為二項分布 $B\left(4,\dfrac{1}{2}\right)$，

$P(X=k)=C_k^4\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4-k}$，$k=0$，1，2，3，4

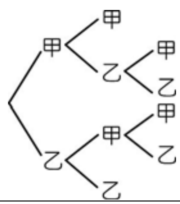
$E(X)=np=4\times\dfrac{1}{2}=2$（次）

(2) $Y=5X+3(4-X)=2X+12$

$E(Y)=E(2X+12)=2E(X)+12=16$（元）

9. 根據以往經驗，甲、乙兩人下棋比賽，甲贏的機率是 $\dfrac{1}{3}$ 且每次比賽各自獨立，今約定先贏 2 場獲勝，設隨機變數 X 的取值為兩人分出勝負所需的場數，試求 X 的期望值與標準差。

解　畫出樹狀圖如下，代表甲、乙兩人所有可能的比賽結果



X	2	3
p_X	$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$	$2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)+2\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$

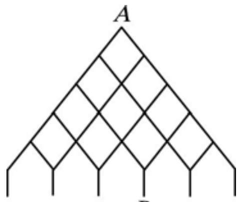
故隨機變數 X 的期望值為 $E(X)=2\times\dfrac{5}{9}+3\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{22}{9}$（場）

隨機變數 X 的變異數為 $Var(X)=\left(2-\dfrac{22}{9}\right)^2\times\dfrac{5}{9}+\left(3-\dfrac{22}{9}\right)^2\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{20}{81}$

隨機變數 X 的標準差為 $\sqrt{Var(X)}=\dfrac{2\sqrt{5}}{9}$（場）

10. 某水管網路如下圖，管路經設計使得往右的水量為往左水量的 2 倍，設 A 入口的水量為 1 單位，試求 P 出口流出的水量。

（提示：$A \to P$ 的水流路線共有 C_3^5 種）



解　水流在每個交叉路口往右的水量是原水量的 $\dfrac{2}{3}$，而往左的水量是原水量的 $\dfrac{1}{3}$，水欲從 P 出口流出，必定往右 3 次，往左 2 次，其路線共有 C_3^5 種，而每條路線的出水量皆為 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

故 P 出口流出的水量為 $C_3^5\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{80}{243}$（單位）

三、歷屆試題

11. 有一種遊戲，每次輸贏規則如下：先從 1 至 6 中選定一個號碼 n，再擲三粒均勻的骰子。若三粒骰子的點數全是 n，則可贏 3 元；恰有兩個點數為 n，則可贏 2 元；恰有一個點數為 n，則可贏 1 元；而沒有點數為 n，則輸 1 元。如此，玩一次的期望值（贏為正，輸為負）為________元。　86.學測

（提示：獨立重復試驗 n 次中，恰出現 k 次成功的機率為 $C_k^n p^k（1-p）^{n-k}$）

12. 某次考試共有 10 道是非題，每題答對得 1 分，答錯倒扣 1 分，不作答得 0 分。設甲生確定會作答的有 4 題，其餘 6 題不經考慮隨意猜答。如果甲生確定會作答的 4 題都答對了，那麼甲生得分超過 4 分的機率為________。　81.社會組
（提示：甲生至少猜對 4 題）

13. 已知丟某枚銅板，其出現正面的機率為 p，出現反面的機率為 $（1-p）$，將此枚銅板丟擲 n 次，在丟擲過程中，正面第 1 次出現時，可得獎金 1 元，正面第 2 次出現時，可再得獎金 2 元，正面第 3 次出現時，可再得獎金 3 元，以此類推。試問下列哪些選項是正確的？

(A)若 n 次丟擲中出現正面 k 次，總共得到獎金 $\dfrac{1}{2}（k^2-k）$ 元

(B) 丟擲銅板第二次之後，累計得獎金 1 元的機率為 $2（p-p^2）$

(C) 總共得到獎金 2 元的機率為 $\frac{n(n-1)}{2}p^2(1-p)^{n-2}$

(D) 總共得到獎金 $\frac{1}{2}(n^2-n)$ 元的機率為 $n(p^{n-1}-p^n)$　　98.指考甲

（提示：獨立重複試驗 n 次中，恰出現 k 次成功的機率為 $C_k^n p^k(1-p)^{n-k}$）

14. 職業棒球季後賽第一輪採五戰三勝制，當參賽甲、乙兩隊中有一隊贏得三場比賽時，就由該隊晉級而賽事結束。每場比賽皆須分出勝負，且每場比賽的勝負皆不受之前已賽結果影響。假設甲隊在任一場贏球的機率為定值 p，以 $f(p)$ 表實際比賽場數的期望值（其中 $0\le p\le 1$），請選出正確的選項：
(A) 只須比賽 3 場就產生晉級球隊的機率為 $p^3+(1-p)^3$
(B) 須比賽 4 場才產生晉級球隊的機率為 $p^3(1-p)+p(1-p)^3$
(C) 須比賽 5 場才產生晉級球隊的機率為 $p^3(1-p)^2+p^2(1-p)^3$
(D) $f(p)$ 是 p 的 5 次多項式
(E) $f(p)$ 的常數項等於 3　　仿103.指考甲

簡　答

一、基礎題

1.是　2.(1) $\frac{91}{216}$；(2) $\frac{5}{72}$；(3) $\frac{1}{2}$　3. $\frac{31}{16}$次　4.(1) $\frac{40}{243}$；(2) $\frac{5}{3}$次

5.(1) $\frac{11}{243}$；(2) $\frac{5}{3}$次；(3) $\frac{\sqrt{10}}{3}$次　6. $\frac{1}{2}$顆，$\frac{3}{8}$，$\frac{\sqrt{6}}{4}$顆　7. $\frac{5}{2}$題，$\frac{\sqrt{5}}{2}$題；(2) $\frac{1}{2}$

二、基礎題

8.(1) 2 次；(2) 16 元　9. $\frac{22}{9}$場，$\frac{2\sqrt{5}}{9}$場　10. $\frac{80}{243}$單位

三、歷屆試題

11. $-\frac{17}{216}$　12. $\frac{11}{32}$　13. (B)(D)　14. (A)(E)

能力提升特訓

範例**1** 求期望值 ***n*** 個標準差內的機率

連續投擲一枚均勻的硬幣 9 次，令隨機變數 X 表示正面出現的次數，求 X 會落在與其期望值相距小於或等於三個標準差範圍內的機率。

注意 $E(X)=np$，$Var(X)=npq$。

解 此為 $n=9$，$p=\frac{1}{2}$ 的二項分布

$E(X)=np=9\times\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

$Var(X)=npq=9\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{4}$

$\therefore$隨機變數 X 的標準差為$\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$

故 $P\left(\frac{9}{2}-3\times\frac{3}{2}\le X\le\frac{9}{2}+3\times\frac{3}{2}\right)=P(0\le X\le 9)=1$

（$\because X$ 的可能取值為 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9）

類題

連續投擲一枚均勻的硬幣 10 次，令隨機變數 X 表示正面出現的次數，求 X 會落在與其期望值相距小於或等於一個標準差範圍內的機率。

解 此為 $n=10$，$p=\frac{1}{2}$ 的二項分布

$E(X)=np=10\times\frac{1}{2}=5$

$Var(X)=npq=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$\therefore$隨機變數 X 的標準差為$\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}\approx 1.58$

與期望值相距小於或等於一個標準差的範圍為 $5-\frac{\sqrt{10}}{2}\le X\le 5+\frac{\sqrt{10}}{2}$

此範圍 X 可能的取值為 4，5，6

$\therefore P\left(5-\frac{\sqrt{10}}{2}\le X\le 5+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)$

$$=C_4^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6+C_5^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5+C_6^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{21}{32}$$

補充資料

x_1，x_2，……，x_n 都是白努利試驗中取值是 1（成功）或 0（失敗），成功的機率是 p，而

失敗機率是 $q=1-p$ 的隨機變數，定義 $\overline{X}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)$ 表示 n 次獨立重複試驗成功的比率，則 $\overline{X}$ 的期望值為 p，標準差為 $\sqrt{\frac{pq}{n}}$

期望值 $E(\overline{X})=E\left(\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}\right)=\frac{1}{n}E(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)=\frac{1}{n}(np)=p$

$$=\frac{1}{n}(E(x_1)+E(x_2)+\cdots\cdots+E(x_n))=\frac{1}{n}(p+p+\cdots\cdots+p)=p$$

變異數 $Var(\overline{X})=Var\left(\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}Var(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)$

又 n 次獨立重複試驗成功次數的變異數為 npq　$\therefore Var(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)=npq$

故 $Var(\overline{X})=\frac{1}{n^2}(npq)=\frac{pq}{n}$，$\overline{X}$ 的標準差為 $\sqrt{Var(\overline{X})}=\sqrt{\frac{pq}{n}}$ 。

範例2　$\overline{X}$ 的期望值與標準差

連續投擲一枚均勻硬幣 5 次，以 $\overline{X}$ 表示出現正面次數的比率，試計算 $\overline{X}$ 的期望值與標準差。

注意　$E(\overline{X})=p$，$Var(\overline{X})=\frac{pq}{n}$ 。

解　$E(\overline{X})=p=\frac{1}{2}$

$$Var(\overline{X})=\frac{pq}{n}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{5}=\frac{1}{20}$$

$\therefore \overline{X}$ 的標準差為 $\sqrt{\frac{1}{20}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$

類題

連續投擲一顆公正骰子 2000 次，以 $\overline{X}$ 表示出現點數是 6 的比率，試計算 $\overline{X}$ 的期望值與標準差。

解　$E(\overline{X})=p=\frac{1}{6}$

$$Var(\overline{X})=\frac{pq}{n}=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}{2000}=\frac{1}{14400}$$

$\therefore \overline{X}$ 的標準差為 $\sqrt{\frac{1}{14400}}=\frac{1}{120}$