1-1　隨機的意義

主題一　隨機的意義

1. 隨機試驗：

具不確定結果的現象，稱為隨機現象。如果一個試驗具有隨機現象，我們就稱這樣的試驗為隨機試驗。

2. 隨機變數：

如果我們把隨機試驗的結果賦予數值，該數值就稱為隨機變數，通常以大寫的英文字母 X，Y，Z，……來表示。

例：(1) 投擲一枚均勻的硬幣一次時，可以利用隨機變數 X 來表示這個試驗出現正面的次數 $\begin{cases} X=0\text{，表示出現反面} \\ X=1\text{，表示出現正面} \end{cases}$。

(2) 投擲一枚均勻的硬幣兩次時，可以利用隨機變數 Y 來表示這個試驗出現正面的次數 $\begin{cases} Y=0\text{，表示出現（反，反）} \\ Y=1\text{，表示出現（正，反）或（反，正）} \\ Y=2\text{，表示出現（正，正）} \end{cases}$。

3. 機率質量函數：

對於隨機變數 X 所有可能的取值，都求出其機率的值 p_X。這樣的函數對應關係稱為機率質量函數。

例：投擲一枚均勻的硬幣兩次時，令隨機變數 X 的取值為正面出現的次數：

$$P(X=k)=\begin{cases} \frac{1}{4}, k=0 \\ \frac{1}{2}, k=1 \\ \frac{1}{4}, k=2 \end{cases}\text{，亦可寫成 } P(X=0)=\frac{1}{4}\text{，}P(X=1)=\frac{1}{2}\text{，}P(X=2)=\frac{1}{4}\text{。}$$

4. 機率分布表：如果隨機變數 X 可能的取值為 x_k，$k=1$，2，……，n，將 x_k 所對應的機率記為 p_k（即 $P(X=x_k)$），就得到 X 的機率質量函數如下：

X	x_1	x_2	……	x_k	……	x_n
p_X	p_1	p_2	……	p_k	……	p_n

此表稱為隨機變數 X 的機率分布表，其中：

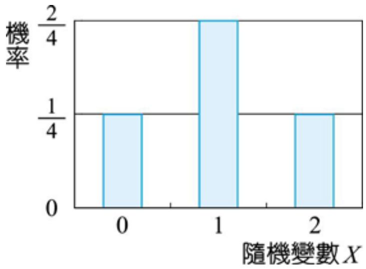
(1) $0\leq p_k\leq 1$，$k=1$，2，……，n。

(2) $p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1$。

5. 機率質量函數圖：

若以橫軸代表隨機變數 X 的取值，縱軸代表 X 對應的機率 p_X，即可繪出機率質量函數圖。

例：投擲一枚均勻硬幣兩次時，令隨機變數 X 的取值為正面出現的次數，則隨機變數 X 的機率質量函數圖如下：



例題1　機率質量函數

投擲一枚均勻硬幣三次，令隨機變數 X 表示反面出現的次數，試求：

(1) 隨機變數 X 的機率質量函數。

(2) 隨機變數 X 的機率分布。

(3) 繪出隨機變數 X 的機率質量函數圖。

解 (1) 投擲一枚均勻硬幣三次，其樣本空間

$S=\{$（反，反，反），（正，反，反），（反，正，反），（反，反，正），（正，正，反），（正，反，正），（反，正，正），（正，正，正）$\}$

由題意知隨機變數 X 可能的取值為 0，1，2，3

可得 X 的機率質量函數為 $P(X=0)=\frac{1}{8}$，$P(X=1)=\frac{3}{8}$，$P(X=2)=\frac{3}{8}$，$P(X=3)=\frac{1}{8}$

(2) 隨機變數 X 的機率分布如下表：

X	0	1	2	3
p_X	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

類題

袋中有 1，2，3，4 號球各 1 顆，自其中任取兩球，令隨機變數 X 表示兩球號碼中較大的一數，試求：

(1) 隨機變數 X 的機率質量函數。

(2) 隨機變數 X 的機率分布。

(3) 繪出隨機變數 X 的機率質量函數圖。

解 (1) 任取兩球，較大數是 1 的機率為 $\frac{0}{C_2^4}=0$；

任取兩球，較大數是 2 的機率為 $\frac{1}{C_2^4}=\frac{1}{6}$

任取兩球，較大數是 3 的機率為 $\frac{2}{C_2^4}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$；

任取兩球，較大數是 4 的機率為 $\frac{3}{C_2^4}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

由題意知隨機變數 X 可能的取值為 2，3，4

可得 X 的機率質量函數為 $P(X=2)=\frac{1}{6}$，$P(X=3)=\frac{1}{3}$，$P(X=4)=\frac{1}{2}$

(2) 隨機變數 X 的機率分布如下表：

X	2	3	4
p_X	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

例題2　機率分布

若隨機變數 X 表示同時投擲兩顆公正骰子的點數和，試求：

(1) 隨機變數 X 的機率分布。

(2) 點數和為 10 點以上（含）的機率。

解　(1) 投擲兩顆公正骰子 1 次，其樣本空間

$S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

隨機變數 X 代表兩顆骰子的點數和，可得 X 可能的取值為 2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12

∴隨機變數 X 的機率分布如下表：

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_X	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(2) 點數和為 10 點以上（含）的機率為

$$P(X\geq 10)=P(X=10)+P(X=11)+P(X=12)=\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

類題

已知一袋中裝有三枚分別為 1 元、5 元、10 元的均勻代幣，假設每一枚代幣被抽中的機率相等。今從袋中抽出一枚均勻代幣，記錄其金額後放回袋中，再從袋中抽出一枚均勻代幣。若隨機變數 X 表示兩次抽出代幣的金額總和，試求：

(1) 隨機變數 X 的機率分布。

(2) 金額總和大於或等於 10 元的機率。

解　(1) 從袋中抽取兩次的代幣（取出後放回），其樣本空間

$S=\{(1,1),(1,5),(1,10),(5,1),(5,5),(5,10),(10,1),(10,5),(10,10)\}$

隨機變數 X 表示兩次抽出代幣的金額總和，可得 X 可能的取值為 2，6，10，11，15，20

∴隨機變數 X 的機率分布如下表：

X	2	6	10	11	15	20
p_X	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

(2) 金額總和大於或等於 10 元的機率為

$$P(X\geq 10)=P(X=10)+P(X=11)+P(X=15)+P(X=20)$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

主題二　期望值、變異數、標準差

1. 隨機變數的期望值（平均的報酬）：若隨機變數 X 的機率分布如下表：

X	x_1	x_2	……	x_k	……	x_n
p_X	p_1	p_2	……	p_k	……	p_n

則隨機變數 X 的期望值為 $E(X)=\sum_{k=1}^{n}x_k p_k=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$。

∴期望值代表隨機變數 X 的加權平均。

2. 一組數據的變異數與標準差：（第二冊）

若一組數據 x_1，x_2，……，x_n 的平均數為 μ，則這組數據的

(1) 變異數為 $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2=\frac{1}{n}\left[(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots\cdots+(x_n-\mu)^2\right]$

$$=(x_1-\mu)^2\cdot\frac{1}{n}+(x_2-\mu)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots\cdots+(x_n-\mu)^2\cdot\frac{1}{n}。$$

可將每一個數據 x_1，x_2，……，x_n 出現的機率視為 $\frac{1}{n}$。

數據	x_1	x_2	…	x_k	…	x_n
機率	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$

(2) 標準差為 $\sqrt{\sigma^2}=\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}{n}-\mu^2}$。

3. 隨機變數的變異數與標準差：對於隨機變數 X，我們用類似的方法定義變異數與標準差

(1) 變異數為 $Var(X)=(x_1-E(X))^2\cdot p_1+(x_2-E(X))^2\cdot p_2+\cdots\cdots+(x_n-E(X))^2\cdot p_n$

$$=\sum_{k=1}^{n}(x_k-E(X))^2\cdot p_k。$$

(2) 標準差為 $\sqrt{Var(X)}$。（或以 σ 表示）

(3) $Var(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-E(X))^2\cdot p_k=E(X^2)-(E(X))^2$。

補充：若 a，b 皆為常數，則：

(1) 期望值：$E(aX+b)=aE(X)+b$。

(2) 變異數：$Var(aX+b)=a^2Var(X)$。

(3) 標準差：$\sqrt{Var(aX+b)}=|a|\sqrt{Var(X)}$。

例題3　期望值

投擲一枚均勻硬幣三次，令隨機變數 X 表示反面出現的次數，試求隨機變數 X 的期望值。

解　投擲一枚均勻硬幣三次，結果可能出現

{（反，反，反），（正，反，反），（反，正，反），（反，反，正），（正，正，反），（正，反，正），（反，正，正），（正，正，正）} 8 種情形

隨機變數 X 的機率分布如下表：

X	0	1	2	3
p_X	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

∴期望值為 $E(X)=\sum_{k=1}^{4}x_kp_k=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$（次）

類題

1. 袋中有 1，2，3，4 號球各 1 顆，自其中任取兩球，令隨機變數 X 表示兩球號碼中較大的一數，試求隨機變數 X 的期望值。

   解　隨機變數 X 的機率分布如下表：

X	2	3	4
p_X	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

   ∴期望值為 $E(X)=\sum_{k=1}^{3}x_kp_k=2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{2}{6}+4\times\frac{3}{6}=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$

2. 同時擲一枚均勻硬幣與一顆公正骰子，若硬幣擲出正面，可得骰子點數的 30 倍獎金，若硬幣擲出反面，可得骰子點數的 10 倍獎金（單位：元）。則擲一次硬幣與骰子的獎金期望值為________元。〔99 課綱數甲大考中心參考試題〕

   解　同時擲一枚均勻硬幣與一顆公正骰子的樣本空間

   $S=$ {（正，1），（正，2），（正，3），（正，4），（正，5），（正，6），（反，1），（反，2），（反，3），（反，4），（反，5），（反，6）}

   令隨機變數 X 表示擲一次硬幣與骰子的獎金

$$E(X)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{30+60+90+120+150+180}{6}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{10+20+30+40+50+60}{6}\right)$$

$$=\frac{30}{2}\times\left(\frac{1+2+3+4+5+6}{6}\right)+\frac{10}{2}\times\left(\frac{1+2+3+4+5+6}{6}\right)=70\text{（元）}$$

例題4　期望值的應用

便利商店推出研磨咖啡的促銷活動。當顧客一次購買兩杯研磨咖啡，可享自抽獎箱中抽取一球，決定這兩杯咖啡折扣的優惠。已知箱中標示折扣優惠球的數量如下表：

標示折扣	9 折	7 折	5 折
球數	15	10	5

若一杯研磨咖啡的原價是 60 元，試問顧客一次購買兩杯咖啡付款金額的期望值為多少？

注意　兩杯研磨咖啡的原價是 120 元。

解　設隨機變數 X 表示一次購買兩杯咖啡的付款金額，X 可能的取值為

$120\times0.9=108$，$120\times0.7=84$，$120\times0.5=60$

∴隨機變數 X 的機率分布如下表：

X	108	84	60
p_X	$\frac{15}{30}$	$\frac{10}{30}$	$\frac{5}{30}$

可得期望值 $E(X)=108\times\frac{15}{30}+84\times\frac{10}{30}+60\times\frac{5}{30}=54+28+10=92$（元）

類題

大學學測數學多選題的計分方式如下：每題有 5 個選項，各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。若崇華在作答某一題多選題時，確定有 2 個選項是正確的，已作答於答案區，但另外 3 個選項不確定，決定用猜的。試求崇華本題得分的期望值。

解　設隨機變數 X 表示崇華本題的得分數，X 可能的取值為 5，3，1，0

隨機變數 X 的機率分布如下表：

X	5	3	1	0
p_X	$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$	$C_2^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$	$C_1^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

可得期望值

$E(X)=5\times\frac{1}{8}+3\times\frac{3}{8}+1\times\frac{3}{8}+0\times\frac{1}{8}=\frac{17}{8}$（分）

例題5　期望值、變異數、標準差

袋中有大小一樣的紅球 4 顆與白球 6 顆，自袋中任意取出三球，令隨機變數 X 表示取出三顆球中紅球的個數，試求隨機變數 X 的期望值、變異數與標準差。

注意　變異數為 $Var(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-E(X))^2\cdot p_k$，標準差為 $\sqrt{Var(X)}$。

解　由題意知隨機變數 X 可能的取值為 0，1，2，3

其機率分布如下表：

X	0	1	2	3
p_X	$\frac{C_3^6}{C_3^{10}}=\frac{1}{6}$	$\frac{C_1^4\times C_2^6}{C_3^{10}}=\frac{1}{2}$	$\frac{C_2^4\times C_1^6}{C_3^{10}}=\frac{3}{10}$	$\frac{C_3^4}{C_3^{10}}=\frac{1}{30}$

X 的期望值為 $E(X)=\sum_{k=1}^{4}x_k p_k=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$（顆）

X 的變異數為

$$Var(X)=\left(0-\frac{6}{5}\right)^2\times\frac{1}{6}+\left(1-\frac{6}{5}\right)^2\times\frac{1}{2}+\left(2-\frac{6}{5}\right)^2\times\frac{3}{10}+\left(3-\frac{6}{5}\right)^2\times\frac{1}{30}$$

$$=\frac{6}{25}+\frac{1}{50}+\frac{24}{125}+\frac{27}{250}=\frac{140}{250}=\frac{14}{25}$$

X 的標準差為 $\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{14}{25}}=\frac{\sqrt{14}}{5}$（顆）

類題

自 1，2，3，4 中任取兩數，令隨機變數 X 表示取出兩數的數字和，試求隨機變數 X 的期望值、變異數與標準差。

解　由題意知隨機變數 X 可能的取值為 3，4，5，6，7

其機率分布如下表：

X	3	4	5	6	7
p_X	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

X 的期望值為 $E(X)=\sum_{k=1}^{5}x_k p_k=3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{2}{6}+6\times\frac{1}{6}+7\times\frac{1}{6}=\frac{30}{6}=5$

X 的變異數為 $Var(X)=(3-5)^2\times\frac{1}{6}+(4-5)^2\times\frac{1}{6}+(5-5)^2\times\frac{2}{6}+(6-5)^2\times\frac{1}{6}+$

$(7-5)^2\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$

X 的標準差為 $\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$

例題6　期望值、變異數、標準差的性質

已知隨機變數 X_1，X_2 的機率分布如下表，試分別求這兩個隨機變數的期望值、變異數與標準差。

X_1	1	2	3	4	5
p_{X_1}	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

X_2	10	20	30	40	50
p_{X_2}	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

注意　期望值 $E(X)=\sum_{k=1}^{n}x_k p_k$，變異數 $Var(X)=\sum_{k=1}^{n}[x_k-E(X)]^2\cdot p_k$，標準差為 $\sqrt{Var(X)}$。

解　(1) 由定義可得隨機變數 X_1 的期望值為

$E(X_1)=1\times0.1+2\times0.2+3\times0.4+4\times0.2+5\times0.1=3$

隨機變數 X_2 的期望值為 $E(X_2)=10\times E(X_1)=10\times3=30$

(2) 隨機變數 X_1 的變異數為

$Var(X_1)=(1-3)^2\times0.1+(2-3)^2\times0.2+(3-3)^2\times0.4+(4-3)^2\times0.2+(5-3)^2\times0.1=1.2=\frac{6}{5}$

隨機變數 X_2 的變異數為 $Var(X_2)=10^2\times Var(X_1)=100\times\frac{6}{5}=120$

(3) 隨機變數 X_1 的標準差為 $\sqrt{Var(X_1)}=\sqrt{\frac{6}{5}}=\frac{\sqrt{30}}{5}$

隨機變數 X_2 的標準差為 $\sqrt{Var(X_2)}=\sqrt{120}=2\sqrt{30}$

類題

1. 已知隨機變數 X_1，X_2 的機率分布如下表，試分別求這兩個隨機變數的期望值、變異數與標準差。

X_1	1	2	3	4
p_{X_1}	0.2	0.3	0.3	0.2

X_2	5	10	15	20
p_{X_2}	0.2	0.3	0.3	0.2

解　(1) 由定義可得隨機變數 X_1 的期望值為

$E(X_1)=1\times0.2+2\times0.3+3\times0.3+4\times0.2=2.5=\frac{5}{2}$

隨機變數 X_1 的變異數為

$$Var(X_1)=\left(1-\frac{5}{2}\right)^2\times0.2+\left(2-\frac{5}{2}\right)^2\times0.3+\left(3-\frac{5}{2}\right)^2\times0.3+\left(4-\frac{5}{2}\right)^2\times0.2$$
$$=\frac{9}{20}+\frac{3}{40}+\frac{3}{40}+\frac{9}{20}=\frac{42}{40}=\frac{21}{20}$$

隨機變數 X_1 的標準差為 $\sqrt{Var(X_1)}=\sqrt{\frac{21}{20}}=\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{105}}{10}$

(2) $X_2=5X_1$

隨機變數 X_2 的期望值為 $E(X_2)=5\times E(X_1)=5\times\frac{5}{2}=\frac{25}{2}$

隨機變數 X_2 的變異數為 $Var(X_2)=5^2\times Var(X_1)=25\times\frac{21}{20}=\frac{105}{4}$

隨機變數 X_2 的標準差為 $\sqrt{Var(X_2)}=5\sqrt{Var(X_1)}=5\times\frac{\sqrt{105}}{10}=\frac{\sqrt{105}}{2}$

2. 葛林參加遊戲，規則如下：先付 100 元當作抽獎費，才可擲兩顆公正的正四面體骰子 1 次，當出現的點數和為 X 時，可以獲得 $aX+3b$ 元（其中 a，b 均為正整數）。若 Y 表示獲得的獎金扣除抽獎費 100 元之後的餘額，請選出下列選項何者正確？

(A) 期望值 $E(Y)=5a+3b-100$ 元

(B) 變異數 $Var(Y)=\frac{5}{2}a$

(C) 當 $a=10$，$b=5$ 時，則 $E(Y)=65$ 元

(D) 當 $a=10$，$b=5$ 時，則 $E(Y)=-35$ 元

(E) 當 $E(Y)=0$ 時，滿足條件的數對 (a,b) 有 6 組。

解　擲兩顆公正的正四面體骰子 1 次，可能出現的情形有：

$(1,1)$，$(1,2)$，$(1,3)$，$(1,4)$

$(2,1)$，$(2,2)$，$(2,3)$，$(2,4)$

$(3,1)$，$(3,2)$，$(3,3)$，$(3,4)$

$(4,1)$，$(4,2)$，$(4,3)$，$(4,4)$

共 16 種情形

∴隨機變數 X 可能的取值有 2，3，4，5，6，7，8 其機率分布如下表：

X	2	3	4	5	6	7	8
p_X	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

X 的期望值為 $E(X)=\sum_{k=1}^{n}x_kp_k=2\times\frac{1}{16}+3\times\frac{2}{16}+4\times\frac{3}{16}+5\times\frac{4}{16}+6\times\frac{3}{16}+7\times\frac{2}{16}+8\times\frac{1}{16}$
$=5$（元）

X 的變異數為 $Var(X)=(2-5)^2\times\frac{1}{16}+(3-5)^2\times\frac{2}{16}+(4-5)^2\times\frac{3}{16}+$
$(5-5)^2\times\frac{4}{16}+(6-5)^2\times\frac{3}{16}+(7-5)^2\times\frac{2}{16}+$
$(8-5)^2\times\frac{1}{16}=\frac{5}{2}$

(A) ○：$E(Y)=E(aX+3b-100)=aE(X)+3b-100=5a+3b-100$（元）

(B) ×：$Var(Y)=Var(aX+3b-100)=a^2Var(X)=\frac{5}{2}a^2$

(C) ×：$a=10$，$b=5$ 時，$E(Y)=aE(X)+3b-100=50+15-100=-35$（元）

(D) ○：同(C)

(E) ○：$5a+3b-100=0$，滿足此條件的正整數解有 6 組

a	2	5	8	11	14	17
b	30	25	20	15	10	5

故選(A)(D)(E)

重要性：★★★★☆

1-1　段考實力演練

一、基礎題

1. 投擲公正的正四面體骰子兩顆（每個面的編號分別為 1，2，3，4），令隨機變數 X 表示兩顆骰子的點數和，試求：

(1) $P(X=6)$。

(2) $P(X\leq 3)$。

(3) 繪出隨機變數 X 的機率質量函數圖。

解　樣本空間

$S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),$
$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),$
$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),$
$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

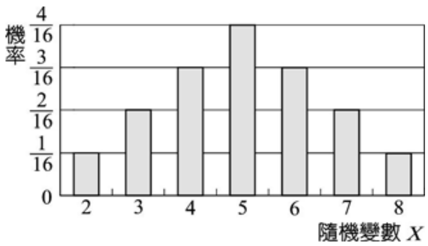
(1) $X=6$ 的事件為 $\{(2,4),(3,3),(4,2)\}$ 故 $P(X=6)=\dfrac{3}{16}$

(2) $X\leqq 3$ 的事件為 $\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ 故 $P(X\leqq 3)=\dfrac{3}{16}$

(3) 隨機變數 X 的機率分布如下表：

X	2	3	4	5	6	7	8
p_X	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

隨機變數 X 的機率質量函數圖如下：



2. 投擲一顆公正骰子，點數為 1 可得 1 元，點數為 2 可得 2 元，…，點數為 6 可得 6 元，若隨機變數 X 代表擲骰子一次所得的金額，試求 $E(X)$。

解　由題意知隨機變數 X 可能的取值為 1，2，3，4，5，6，其機率分布如下表：

X	1	2	3	4	5	6
p_X	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

期望值為

$$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}\text{（元）}$$

3. 袋中有 3 顆白球與 2 顆紅球，任取三球，試求白球球數的期望值、變異數與標準差。

解　令隨機變數 X 表示取出 3 顆球中白球的個數，由題意知隨機變數 X 可能的取值為 1，2，3，其機率分布如下表：

X	1	2	3
p_X	$\frac{C_1^3\times C_2^2}{C_3^5}=\frac{3}{10}$	$\frac{C_2^3\times C_1^2}{C_3^5}=\frac{3}{5}$	$\frac{C_3^3}{C_3^5}=\frac{1}{10}$

X 的期望值為

$E(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$（顆）

X 的變異數為

$Var(X)=\left(1-\frac{9}{5}\right)^2\times\frac{3}{10}+\left(2-\frac{9}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}+\left(3-\frac{9}{5}\right)^2\times\frac{1}{10}=\frac{24}{125}+\frac{3}{125}+\frac{18}{125}=\frac{45}{125}=\frac{9}{25}$

X 的標準差為 $\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$（顆）

4. 在甲、乙兩箱中各放入 1 組標示 1 號至 4 號的四張卡片，試求：
 (1) 從甲箱中取出 1 張卡片時，取出數字的期望值。
 (2) 從甲、乙兩箱中各取出 1 張卡片，兩數字和的期望值。

解　(1) 令隨機變數 X 表示從甲箱中取出卡片的數字，故隨機變數 X 可能的取值為 1，2，3，4，其機率分布如下表：

X	1	2	3	4
p_X	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

期望值為 $E(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$

(2) 從甲、乙兩箱各取出 1 張卡片的樣本空間

$S=$｛（1，1），（1，2），（1，3），（1，4），（2，1），（2，2），（2，3），（2，4），（3，1），（3，2），（3，3），（3，4），（4，1），（4，2），（4，3），（4，4）｝

令隨機變數 Y 表示從甲、乙兩箱中各取出 1 張卡片所得到的兩數字和，故隨機變數 Y 可能的取值為 2，3，4，5，6，7，8，其機率分布如下表：

Y	2	3	4	5	6	7	8
p_Y	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

故 $E(Y)=2\times\frac{1}{16}+3\times\frac{2}{16}+4\times\frac{3}{16}+5\times\frac{4}{16}+6\times\frac{3}{16}+7\times\frac{2}{16}+8\times\frac{1}{16}=5$

5. 隨機變數 X 的機率質量函數為 $\begin{cases}P(X=1)=\frac{1}{6}\\ P(X=3)=\frac{5}{6}\end{cases}$，試求隨機變數 X 的期望值、變異數與標準差。

解　X 的期望值為 $E(X)=1\times\frac{1}{6}+3\times\frac{5}{6}=\frac{8}{3}$

X 的變異數為 $Var(X)=\left(1-\frac{8}{3}\right)^2\times\frac{1}{6}+\left(3-\frac{8}{3}\right)^2\times\frac{5}{6}=\frac{5}{9}$

X 的標準差為 $\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

6. 明哲擲一顆公正的骰子，若出現偶數點可得 30 元，若出現點數為 5，則賠 24 元；若出現的點數為 1 或 3，則賠 15 元，試求明哲擲一次骰子所得金額的期望值、變異數與標準差。

解　令隨機變數 X 表示明哲擲一顆公正骰子所得的金額，則 X 可能的取值為 30，-24，-15，其機率分布如下表：

X	30	-24	-15
p_X	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$

X 的期望值為 $E(X)=30\times\frac{3}{6}+(-24)\times\frac{1}{6}+(-15)\times\frac{2}{6}=6$（元）

X 的變異數為 $Var(X)=(30-6)^2\times\frac{3}{6}+(-24-6)^2\times\frac{1}{6}+(-15-6)^2\times\frac{2}{6}=585$

X 的標準差為 $\sqrt{Var(X)}=\sqrt{585}=3\sqrt{65}$（元）

7. 以隨機變數 X 表示投擲一顆公正骰子出現的點數，令隨機變數 $Y=3X+5$，求隨機變數 Y 的期望值、變異數與標準差。

解　隨機變數 X 可能的取值為 1，2，3，4，5，6，則隨機變數 Y 的可能取值為 8，11，14，17，20，23，其機率分布如下表：

Y	8	11	14	17	20	23
p_Y	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Y 的期望值為 $E(Y)=8\times\frac{1}{6}+11\times\frac{1}{6}+14\times\frac{1}{6}+17\times\frac{1}{6}+20\times\frac{1}{6}+23\times\frac{1}{6}=\frac{31}{2}$

Y 的變異數為

$$Var(Y)=\left(8-\frac{31}{2}\right)^2\times\frac{1}{6}+\left(11-\frac{31}{2}\right)^2\times\frac{1}{6}+\left(14-\frac{31}{2}\right)^2\times\frac{1}{6}+\left(17-\frac{31}{2}\right)^2\times\frac{1}{6}+\left(20-\frac{31}{2}\right)^2\times\frac{1}{6}+\left(23-\frac{31}{2}\right)^2\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{225}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{81}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{9}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{9}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{81}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{225}{4}\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{315}{12}=\frac{105}{4}$$

Y 的標準差為 $\sqrt{Var(Y)}=\sqrt{\frac{105}{4}}=\frac{\sqrt{105}}{2}$

二、進階題

8. 心安產物保險公司針對某款新車推出一年期的汽車竊盜損失險，保額為 100 萬元，保費為 2500 元。若由統計資料可知，該款新車在一年內失竊的機率為 0.002，試問心安產物保險公司獲利的期望值為何？

（提示：無論失竊與否，保費 2500 元皆為保險公司的收入）

解　保險公司獲利的期望值為

$2500+(-1000000)\times0.002=2500-2000=500$（元）

9. 將 1 到 4 各數字分別記在四張卡片上放入袋中，試求：

(1) 一次取兩張，其卡號乘積的期望值。

(2) 一次取一張，放回再取一張，其卡號乘積的期望值。

（提示：一次取兩張與一次取一張，放回再取一張的樣本空間不同，機率分布也不同）

解　(1) 一次取兩張，其樣本空間

$S=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$

令隨機變數 X 表示卡號的乘積

故隨機變數 X 可能的取值為 1×2，1×3，1×4，2×3，2×4，3×4

其機率分布如下表：

X	1×2	1×3	1×4	2×3	2×4	3×4
p_X	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$\therefore E(X)=2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}+8\times\frac{1}{6}+12\times\frac{1}{6}=\frac{35}{6}$

(2) 一次取一張，放回再取一張，兩次取出卡號的樣本空間

$S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

令隨機變數 Y 表示卡號的乘積

故隨機變數 Y 可能的取值為 1，2，3，4，6，8，9，12，16

其機率分布如下表：

Y	1	2	3	4	6	8	9	12	16
p_Y	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

$\therefore E(Y)=1\times\frac{1}{16}+2\times\frac{2}{16}+3\times\frac{2}{16}+4\times\frac{3}{16}+6\times\frac{2}{16}+8\times\frac{2}{16}+9\times\frac{1}{16}+12\times\frac{2}{16}+16\times\frac{1}{16}$

$=\frac{100}{16}=\frac{25}{4}$

三、歷屆試題

10. 袋子裡有 3 個球，2 個球上標 1 元，1 個球上標 5 元。從袋中任取 2 個球，即可得到兩個球所標錢數的總和，則此玩法所得錢數的期望值是________元。　88.學測

11. 某次數學測驗共有 25 題單一選擇題，每題都有五個選項，每答對一題可得 4 分，答錯倒扣 1 分。某生確定其中 16 題可答對；有 6 題他確定五個選項中有兩個選項不正確，因此這 6 題他就從剩下的選項中分別猜選一個；另外 3 題只好亂猜，則他這次測驗得分之期望值為________分。（計算到整數為止，小數點以後四捨五入）　92.學測

（提示：分別求 16 題、6 題、3 題的期望值）

12. 箱中有三顆紅球與三顆白球。一摸彩遊戲是從箱中隨機同時抽出兩顆球。如果抽出的兩球顏色不同，則得獎金 100 元；如果兩球顏色相同，則無獎金。請問此遊戲獎金的期望值為何？
(A) 20 元　(B) 30 元　(C) 40 元　(D) 50 元　(E) 60 元　99.學測

13. 某公司舉辦年終尾牙餐會，會中安插了一項抽獎活動。在抽獎箱中放了一副 52 張的撲克牌，每人抽出 1 張牌，且抽後放回；抽到紅心的紅色牌給獎金 8000 元，抽到方塊的紅色牌給獎金 6000 元，而抽到黑桃或梅花的黑色牌則一律給 2000 元的獎金。假設每張牌被抽到的機率相等，那麼抽到獎金的數學期望值為________元。　99.指考乙

14. 一顆特別的骰子，其六個面中有兩面為 2 點、兩面為 4 點，其餘兩面為 5 點。假設投擲這顆骰子每面出現的機率都相等。擲這顆骰子兩次，所得點數和的數學期望值為________。　101.指考乙

15. 袋中有 3 顆白球與 1 顆黑球，每次隨機從袋中抽出 1 球，袋中每一球被抽到的機率皆相同，抽出後不放回，直到抽中黑球時遊戲結束。若在第 k 次抽到黑球，則得到 k 元獎金。此遊戲可獲得獎金的數學期望值為________元。　102.指考乙

簡　答

一、基礎題

1.(1) $\frac{3}{16}$；(2) $\frac{3}{16}$；(3) 略　2. $\frac{7}{2}$ 元　3. $\frac{9}{5}$ 顆，$\frac{9}{25}$，$\frac{3}{5}$ 顆　4.(1) $\frac{5}{2}$；(2) 5

5. $\frac{8}{3}$，$\frac{5}{9}$，$\frac{\sqrt{5}}{3}$　6. 6 元，585，$3\sqrt{65}$ 元　7. $\frac{31}{2}$，$\frac{105}{4}$，$\frac{\sqrt{105}}{2}$

二、進階題

8. 500元　9.(1) $\frac{35}{6}$；(2) $\frac{25}{4}$

三、歷屆試題

10. $\frac{14}{3}$　11. 68　12. (E)　13. 4500　14. $\frac{22}{3}$　15. $\frac{5}{2}$

能力提升特訓

範例1　期望值

某電視臺舉辦抽獎遊戲，現場準備的抽獎箱裡放置了四個分別標有 1000 元、800 元、600 元、0 元獎額的球，參加者自行從抽獎箱裡摸取一球（取後即放回），主辦單位即贈送與此球上數字等額的獎金，並規定抽取到 0 元的人可以再摸一次，但是所得獎金折半（若再摸到 0 就沒有第三次機會）；則一個參加者可得獎金的期望值是________元。（計算到整數為止，小數點以後四捨五入）　93.學測

注意　期望值 $E(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k p_k$ 。

解　令隨機變數 X 表示獎金可能的取值，其機率分布如下表：

X	1000	800	600	500	400	300	0

p_X	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$\therefore E(X)=1000\times\frac{1}{4}+800\times\frac{1}{4}+600\times\frac{1}{4}+500\times\frac{1}{16}+400\times\frac{1}{16}+300\times\frac{1}{16}$$

$$=(1000+800+600)\times\frac{1}{4}+(500+400+300)\times\frac{1}{16}=600+75=675\text{（元）}$$

類題

抽獎遊戲中，參加者自箱中抽出一球，確定顏色後放回。只有抽得藍色或紅色球者可得消費券，其金額分別為（抽得藍色球者）2000 元、（抽得紅色球者）1000 元。箱中已置有 2 顆藍色球及 5 顆紅色球。在抽出任一球之機率相等的條件下，主辦單位希望參加者所得消費金額的期望值為 300 元，則主辦單位應於箱內再置入________顆其他顏色的球。　98.學測

解　設再置入 n 顆其他顏色的球，則 P（藍球）$=\frac{2}{n+7}$，而 P（紅球）$=\frac{5}{n+7}$

$$\frac{2}{n+7}\times2000+\frac{5}{n+7}\times1000=300 \Rightarrow 3(n+7)=40+50 \Rightarrow n=23\text{（顆）}$$

歷屆試題

摸彩箱裝有若干編號為 1，2，……，10 的彩球，其中各種編號的彩球數目可能不同。今從中隨機摸取一球，依據所取球的號數給予若干報酬。現有甲、乙兩案：甲案為當摸得彩球的號數為 k 時，其所獲報酬同為 k，乙案為當摸得彩球的號數為 k 時，其所獲報酬為 $11-k$（$k=1$，2，……，10）。已知依甲案每摸取一球的期望值為 $\frac{67}{14}$，則依乙案每摸取一球的期望值為________。　96.學測

解　令 p_k 為抽到 k 號球的機率

則 E（甲案）$=1\times p_1+2\times p_2+\cdots\cdots+10\times p_{10}=\frac{67}{14}$

$$E(\text{乙案})=(11-1)\times p_1+(11-2)\times p_2+\cdots\cdots+(11-10)\times p_{10}$$
$$=11\times(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_{10})-(1\times p_1+2\times p_2+\cdots\cdots+10\times p_{10})$$
$$=11\times1-\frac{67}{14}=\frac{87}{14}$$

〈另解〉

$$E(11-k)=11-E(k)=11-\frac{67}{14}=\frac{87}{14}$$