對話式 數學 複習 1～4 冊	18 回 第四冊（全）	班級：　　座號： 姓名：　　得分：							
1.	(B)	2.	(C)	3.	(A)	4.	(A)(C)(D)	5.	(A)(B)(C)
6.	(C)(D)	7.	$\frac{12\sqrt{29}}{29}$	8.	60	9.	8	10.	$\frac{8}{3}$
11.	$x+y+\sqrt{7}z=\sqrt{7}$	12.	$\frac{5}{6}$	13.	1	14.	4		

一、單一選擇題（共 3 題，每題 4 分）

________1.空間坐標中，有一頂點先從 $(12,11,22)$朝向$(10,10,20)$的方向，以每秒 5 單位的速度前進，則此質點經過多少秒後到達 xy 平面？

(A)6 秒　(B)6.6 秒　(C)2 秒　(D)2.2 秒　(E)4.5 秒。

解 設$A(12,11,22)$、$B(10,10,20)$、$\overrightarrow{AB}(-2,-1,-2)$

$\overleftrightarrow{AB}$參數式$\begin{cases} x=12-2t \\ y=11-t \\ z=22-2t \end{cases}$，$t\in R$

$z=0$代入得$22-2t=0 \Rightarrow t=11$，故直線交 xy 平面於點$Q(-10,0,0)$

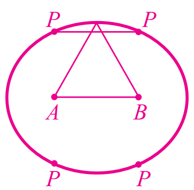
$\overline{AQ}=\sqrt{22^2+11^2+22^2}=\sqrt{11^2(4+1+4)}=\sqrt{11^2\times 9}=33$，$t=\frac{33}{5}=6.6$秒，故選(B)

________2.在坐標平面上給定兩點$A(1,3)$與$B(5,6)$。考慮坐標平面上的點集合 $S=\{P|\Delta PAB$面積 10 且周長為 $15\}$，則下列何者正確？

(A)S 為空集合　(B)S 恰含 2 個點　(C)S 恰含 4 個點

(D)S 為兩線段的聯集　(E)S 為兩直線之聯集。

解 $\because \overline{AB}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，以$\overline{PA}+\overline{PB}=10$作一橢圓



ΔPAB面積最大時$\overline{PA}=\overline{PB}=5$為正三角形

面積$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 5^2 \fallingdotseq \frac{1.732\times 25}{4}=10.825>10$

$\therefore$面積要縮小些，得 S 為四個點，故選(C)

________3.已知$A(-1,-2,3)$、$B(2,-1,4)$、$C(3,6,9)$為空間三點，則ΔABC面積最接近下列哪一個整數？

(A)12　(B)13　(C)14　(D)24　(E)25。

解 $\overrightarrow{AB}=(3,1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(4,8,6)$，$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-2,-14,20)$

$|\vec{n}|=\sqrt{4+196+400}=\sqrt{600}=10\sqrt{6}$　$\therefore \Delta ABC$面積$=\frac{1}{2}\times 10\sqrt{6}=5\sqrt{6}$

$12^2=144$，$(12.5)^2=156.25 \Rightarrow 12^2<150<12.5^2$

$\Rightarrow 12<5\sqrt{6}<12.5$，故$5\sqrt{6}$較接近 12，故選(A)

二、多重選擇題（共 3 題，每題 8 分）

________4.已知空間直線L：$\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{-1}$和下列哪些選項的方程式圖形重合？

(A) $\frac{x+3}{4}=\frac{y-5}{-4}=\frac{z}{-2}$　(B) $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+5}{2}=z$　(C)$\begin{cases} x+y=2 \\ y-2z=5 \end{cases}$

(D) $x=2t-9$，$y=-2t+11$，$z=-t+3$，$t\in R$　(E) $\frac{x+3}{3}=\frac{y-5}{4}=\frac{z}{5}$。

解 (A)　；$(2,-2,-1)//(4,-4,-2)$且 L 上一點$(-3,5,0)$代入合

(B)　；$(2,-2,-1)//(-2,2,1)$，但 L 上一點$(-3,5,0)$代入不合

(C)　；$\begin{cases} \frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{-2} \Rightarrow -2x-6=2y-10 \Rightarrow 2x+2y-4=0 \Rightarrow x+y=2 \\ \frac{y-5}{-2}=\frac{z}{-1} \Rightarrow -y+5=-2z \Rightarrow y-2z=5 \end{cases}$

(D)　；$(2,-2,-1)//(2,-2,-1)$，L 上一點代入 $\Rightarrow \begin{cases} -3=2t-9 \\ 5=-2t+11 \\ 0=-t+3 \end{cases}$，得$t=3$

(E)　；$(2,-2,-1) \nparallel (3,4,5)$故選(A)(C)(D)

________5.設$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$，若 B 為 A 的乘法反方陣，則下列選項哪些是正確的？

(A) $A^2=-I_2$　(B) $A+A^2+A^3+A^4=0_2$　(C) $B=-A$　(D) $B^2=I_2$

(E) $B^{103}=-A$。

解 (A)　；$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=-I_2$

(B)　；$A^3=A^2A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$，$A^4=(A^2)^2=(-I_2)^2=I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A+A^2+A^3+A^4=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

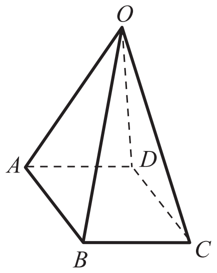
(C)　；$B=A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=-A$

(D)　；$B^2=(-A)^2=A^2=-I_2$

(E)　；$B^4=(-I_2)^2=I_2$，$B^{103}=B^3=BB^2=(-A)(-I_2)=AI_2=A$

故選(A)(B)(C)

________6.如右圖，$O-ABCD$為一金字塔，底是邊長為 1 之正方形，頂點 O 與 A、B、C、D 之距離均為 2。試問下列哪些式子是正確的？



(A) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ (B) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\vec{0}$
(C) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ (D) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$
(E) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=2$。

解 O 投影到底面為 H，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OH}$則且$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OH}$

(A) ；應為$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OH}\neq\vec{0}$

(B) ；應為$\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DO}\right)+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CO}\right)=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{DA}\neq\vec{0}$

(C) ；合 (D) ；合

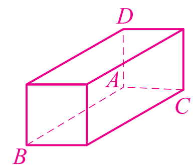
(E) ；ΔOAC邊長為 2、2、$\sqrt{2}$ ∴應為$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=2\times2\times\frac{2^2+2^2-(\sqrt{2})^2}{2\times2\times2}=\frac{6}{2}=3$

∴選(C)(D)

三、填充題（共 8 格，每格 8 分）

7.長方體的長、寬、高三個邊長為$\overline{AB}=6$、$\overline{AC}=4$、$\overline{AD}=3$，A 到平面 BCD 的距離為________。

解 如右圖建立坐標系，設 A 為坐標原點，則$B(6,0,0)$、$C(0,4,0)$、$D(0,0,3)$



平面 BCD 的方程式為$\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1$ $\Rightarrow$ $2x+3y+4z=12$

$\Rightarrow$ A 到平面 BCD 的距離$\frac{|-12|}{\sqrt{4+9+16}}=\frac{12}{\sqrt{29}}=\frac{12\sqrt{29}}{29}$

8.設兩平面E_1：$x-\sqrt{2}y+z=102$，E_2：$x+\sqrt{2}y-z=2013$的銳夾角為________度。

解 設$\overrightarrow{n_1}=(1,-\sqrt{2},-1)$，$\overrightarrow{n_2}=(1,\sqrt{2},-1)$

$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=1-2-1=-2$，$|\overrightarrow{n_1}|=\sqrt{1+2+1}=2$，$|\overrightarrow{n_2}|=\sqrt{1+2+1}=2$

$cos\theta=\pm\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\pm-\frac{2}{2\times2}=\pm\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\theta=60°$或$120°$，故銳夾角為$60°$

9.某國政府長期追蹤全國國民的經濟狀況，依訂定的標準將國民分為高收入和低收入兩類。統計發現高收入的人口一直是低收入人口的兩倍，且知在高收入的人口中，每年有四成會變成低收入，請問在低收入的人口中，每年有________成會轉變為高收入。

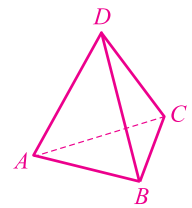
解 設低收入人口中每年有 x 會轉變為高收入

$$\begin{bmatrix}0.6 & x\\0.4 & 1-x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{2}{5}+\frac{x}{3}\\\frac{4}{15}+\frac{1}{3}(1-x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$\frac{2}{5}+\frac{x}{3}=\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $6+5x=10$ $\Rightarrow$ $5x=4$ $\Rightarrow$ $x=0.8$，故每年有 8 成會轉變為高收入

10.正四面體四個頂點分別為$A(0,0,0)$、$B(6,6,0)$、$C(0,6,6)$、$D(6,0,6)$，若四個面的重心分別是 E、F、G、H，則四面體 $EFGH$ 的體積________。

解 設ΔABC、ΔBCD、ΔCDA、ΔDAB的重心依次為 E、F、G、H，



得$E(2,4,2)$、$F(4,4,4)$、$G(2,2,4)$、$H(4,2,2)$

$\overrightarrow{EF}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{EG}=(0,-2,2)$，$\overrightarrow{EH}=(2,-2,0)$

$\overrightarrow{EF}\times\overrightarrow{EG}=(4,-4,-4)$，$\left(\overrightarrow{EF}\times\overrightarrow{EG}\right)\cdot\overrightarrow{EH}=16$，

所求面積$=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{EF}\times\overrightarrow{EG}\right)\cdot\overrightarrow{EH}\right|=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$

11.空間中一平面 E 與正 x 軸、正 y 軸、正 z 軸分別交於 A、B、C 三點，$\overline{CA}=\overline{CB}$，已知 C 之坐標為$(0,0,1)$，且ΔABC之面積為$\frac{3\sqrt{7}}{2}$，則平面 E 的方程式為________。

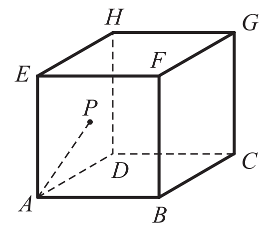
解 設$A(k,0,0)$，$B(0,k,0)$，則$\overrightarrow{CA}=(k,0,-1)$，$\overrightarrow{CB}=(0,k,-1)$

ΔABC面積$=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{CA}\right|^2\times\left|\overrightarrow{CB}\right|^2-\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(k^2+1)(k^2+1)-1^2}=\frac{1}{2}\sqrt{k^4+2k^2}=\frac{3\sqrt{7}}{2}$

$\Rightarrow$ $\sqrt{k^4+2k^2}=\sqrt{63}$，得$k^4+2k^2-63=(k^2+9)(k^2-7)=0$ $\Rightarrow$ $k^2=-9$(不合)或 7，得$k=\sqrt{7}$

則平面方程式為$\frac{x}{\sqrt{7}}+\frac{y}{\sqrt{7}}+\frac{z}{1}=1$，即$x+y+\sqrt{7}z=\sqrt{7}$

12.如右圖所示，$ABCD-EFGH$為邊長等於 1 之正立方體。若 P 點在立方體之內且滿足 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$，則 P 點至直線 AB 之距離為________。（化成最簡分數）



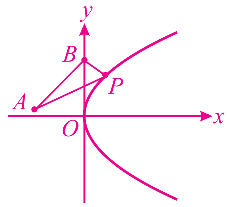
解 令$A(0,0,0)$、$B(1,0,0)$、$D(0,1,0)$、$E(0,0,1)$

則$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}(1,0,0)+\frac{1}{2}(0,1,0)+\frac{2}{3}(0,0,1)=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$，即為 P 坐標

∴$P\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$到 x 軸的距離為$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{5}{6}$

13.設$A(-2,1)$、$B(0,3)$，P 是拋物線$y^2=8x$上一點，則ΔABP面積最小值為________。

解 設$P(2t^2,4t)$，$\overrightarrow{AP}(2t^2+2,4t-1)$，$\overrightarrow{AB}=(2,2)$



$\Delta=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2t^2+2 & 4t-1\\ 2 & 2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|4t^2+4-8t+2|=\frac{1}{2}|4t^2-8t+6|$

$=|2t^2-4t+3|=|2(t-1)^2+1|$

當$t=1$時，面積有最小值為 1

14.已知F_1、F_2為雙曲線$x^2-y^2=1$的兩焦點，點 P 在雙曲線上且$\angle F_1PF_2=60^\circ$，則$\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}$之值為________。

解 $c^2=a^2+b^2=1+1=2$ $\therefore c=\sqrt{2}$，$\overline{F_1F_2}=2c=2\sqrt{2}$，$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a=2$

$\cos 60^\circ=\frac{\overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2-\overline{F_1F_2}^2}{2\overline{PF_1}\,\overline{PF_2}}=\frac{(\overline{PF_1}-\overline{PF_2})^2+2\overline{PF_1}\,\overline{PF_2}-\overline{F_1F_2}^2}{2\overline{PF_1}\,\overline{PF_2}}$

令$\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=x$，$\frac{1}{2}=\frac{4+2x-8}{2x}$ $\Rightarrow$ $x=4$，故$\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=4$