對話式 數學 複習 1~4 冊		13 回 矩　陣				班級：　座號：		姓名：　得分：	
1.	1	2.	-1		$\begin{bmatrix}-2 & -10\\ 10 & 1\end{bmatrix}$	3.	$\begin{bmatrix}3 & 1 & 8\\ 6 & 17 & 16\end{bmatrix}$	4.	6 或 -1
5.	(1) $\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$		(2) -2	6.	2		7	7.	$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & -5\end{bmatrix}$
8.	$(1,-1,2)$	9.	(A)	10.	(D)	11.	(B)(D)	12.	(B)(D)
13.	$\frac{31}{54}$	14.	$\begin{bmatrix}0.8 & 0.2 & 0.1\\ 0.1 & 0.7 & 0.3\\ 0.1 & 0.1 & 0.6\end{bmatrix}$		35%	15.	285	16.	-5

一、概念題（共 11 格，每格 5 分）

1.設$\begin{bmatrix}x+y & 2a\\ 2a+b & x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$，則 $ax+by=$________。

(解) 解聯立$\begin{cases}x+y=1\\ x-y=0\end{cases}$與$\begin{cases}2a=2\\ 2a+b=3\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$與$\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}$，故$ax+by=1$

2.設$A=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$且$3(X+2B)=A$，若$x_{ij}$表示矩陣 X 的第(i,j)元，則

$x_{21}=$________，又$AB=$________。

(解) ① $X+2B=\frac{1}{3}A \Rightarrow X=\frac{1}{3}A-2B$，則$x_{21}=\frac{1}{3}a_{21}-2b_{21}=\frac{1}{3}\times 3-2\times 1=-1$

② $AB=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -10\\ 10 & 1\end{bmatrix}$

3. $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$，則$AB+AC=$________。

(解) $AB+AC=A(B+C)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1 & 8\\ 0 & 5 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 8\\ 6 & 17 & 16\end{bmatrix}$

4.二階方陣$A=\begin{bmatrix}x & 2\\ 3 & x-5\end{bmatrix}$，若 A 無反矩陣，則$x=$________。

(解) $\det(A)=x^2-5x-6=(x-6)(x+1)=0 \Rightarrow x=6$ 或-1

5. $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$，(1) A^{-1}為________　(2) $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$滿足$AB=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，

$a+b+c+d=$________。

(解) (1) $\det(A)=5-6=-1$，$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}5 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$

(2) $AB=2I_2 \Rightarrow B=2A^{-1}I_2=\begin{bmatrix}-10 & 4\\ 6 & -2\end{bmatrix}$，所求$=-10+4+6-2=-2$

6.設矩陣$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & a & 4\\ 4 & 3 & 1 & b\end{bmatrix}$，利用列運算將矩陣 A 化成簡單化矩陣$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，

試求$a=$________，$b=$________。

(解) $\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & a & 4\\ 4 & 3 & 1 & b\end{bmatrix}\xrightarrow[-4R_1+R_3]{-3R_1+R_2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 4 & a-6 & 4\\ 0 & 7 & -7 & b\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{4}R_2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & \frac{a-6}{4} & 1\\ 0 & 7 & -7 & b\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[-7R_2+R_3]{R_2+R_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{a+2}{4} & 0\\ 0 & 1 & \frac{a-6}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{14-7}{4} & b-7\end{bmatrix}$，比較得$\begin{cases}\frac{a+2}{4}=1\\ b-7=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=2\\ b=7\end{cases}$

7.聯立方程式$\begin{cases}2x+3y=c_1\\ 4x-5y=c_2\end{cases}$表成 $A\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$，求二階方陣$A=$________。

(解) 即$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$，故 $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & -5\end{bmatrix}$

8.設$\vec{a}=(3,2,5)$，$\vec{b}=(1,2,-3)$，$\vec{c}=(1,-2,1)$，$\vec{d}=(4,-4,10)$，若$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$，則序組$(x,y,z)=$________。

(解) 即$\begin{cases}3x+y+z=4 \cdots ①\\ 2x+2y-2z=-4 \cdots ②\\ 5x-3y+z=10 \cdots ③\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}①\times 2+②\text{得 } 8x+4y=4\\ ②+③\times 2\text{ 得 } 12x-4y=16\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}$

代回①得 $3-1+z=4 \Rightarrow z=2$

二、單一選擇題（共 2 題，每題 5 分）

________9.利用反方陣解矩陣方程式的方法運用在密碼學中，首先用矩陣將英文字母編碼，例如：a 以$\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$表之，$b$ 以$\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}$表之，⋯，$z$ 以$\begin{bmatrix}2\\ 6\end{bmatrix}$表之。而單字”cow”以$\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 5 & 3\end{bmatrix}$表之，餘類推。今為了保密將某英文單字以矩陣 A 表示並加密後再傳出，方法如下：選取兩個二階方陣$B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}$、$C=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix}$，計算$(B+C)A$後，再傳出。假設收到的內容為矩陣$\begin{bmatrix}8 & 13 & 14\\ 20 & 32 & 35\end{bmatrix}$，則原單字為何？

(A) *dog*　(B) *cat*　(C) *you*　(D) *box*　(E) *pig*。

(解) $(B+C)=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{bmatrix}$，$(B+C)^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}5 & -2\\ -7 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -7 & 3\end{bmatrix}$，$(B+C)A=\begin{bmatrix}8 & 13 & 14\\ 20 & 32 & 35\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A=(B+C)^{-1}\begin{bmatrix}8 & 13 & 14\\ 20 & 32 & 35\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -7 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & 13 & 14\\ 20 & 32 & 35\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 4 & 5 & 7\end{bmatrix}$，表 *dog*

∴選(A)

103MH408T

________10.設 A 為二階方陣，$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$O=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$；若$A^2-5A+6I_2=O$，則下列何者是$5I_2-A$的反矩陣？

(A) A (B) $-A$ (C) $A-5I_2$ (D) $\frac{1}{6}A$ (E) A^2-5A。

(解) $A^2-5A+6I_2=O \Rightarrow A^2-5A=-6I_2 \Rightarrow 5A-A^2=6I_2 \Rightarrow A(5I_2-A)=6I_2$

$\Rightarrow \frac{A}{6}(5I_2-A)=I_2$，故$5I_2-A$的反矩陣為$\frac{A}{6}$ ∴選(D)

三、多重選擇題（共 2 題，每題 5 分）

________11.設 A、B、C 皆為2×2矩陣，則下列敘述哪些是正確的？

(A) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$恆成立 (B) $(AB)C=A(BC)$恆成立

(C)若$AB=O$，則$A=O$或$B=O$ (D)若$\det(A)\neq 0$，且$AB=AC$，則$B=C$

(E) $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$。

(解) (A)矩陣乘法交換率不成立，不合

(B)滿足矩陣乘法結合率，合

(C) $A=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} \Rightarrow AB=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，但$A\neq O$，$B\neq O$，不合

(D)$\because \det(A)\neq 0$ $\therefore A^{-1}$存在，$AB=AC \Rightarrow A^{-1}(AB)=A^{-1}(AC) \Rightarrow B=C$，合

(E)$\because (AB)(B^{-1}A^{-1})=AI_2A^{-1}=AA^{-1}=I_2$，得$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，不合

∴選(B)(D)

________12.安安為了避免公司機密資料被竊取，就發明了一種編碼的方式，將原始數字傳遞給平平，將數對 (x,y)透過$\begin{cases}2x+y=a\\x+2y=b\end{cases}$轉換成密碼 (a,b)，則下列哪些選項是正確的？

(A)數對 $(1,7)$的密碼為 $(9,9)$ (B)密碼 $(9,3)$的原始數對為 $(5,-1)$

(C)該編碼公式可能會把不同數對轉換成相同的密碼 (D)若要將密碼轉換成原始的數對，可透過二階方陣 M 來轉換，即$M\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，則$M=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$。

(解) (A)將數對$(1,7)$代入，得$\begin{cases}2+7=a\\1+14=b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=9\\b=15\end{cases}$，不合 (B)將$(a,b)$用$(9,3)$代入，得$\begin{cases}2x+y=9\\x+2y=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=5\\y=-1\end{cases}$，合 (C)係數行列式$=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=4-1=3\neq 0$ ∴方程組恰有一解，不合 (D)原始方程組用矩陣表示，可寫成$\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$

$\therefore M=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{4-1}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$，合 ∴選(B)(D)

四、填充題（共 5 格，每格 5 分）

13.下雨天的翌日也下雨的機率是$\frac{1}{3}$，非下雨天的翌日下雨的機率是$\frac{1}{2}$，今假設第一天是下雨天，則第四天非下雨天的機率為________。

(解) 轉移矩陣 $A=\begin{array}{c}\text{下雨}\quad\text{非下雨}\\ \begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{下雨}\\\text{非下雨}\end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\underset{\text{第一天}}{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}=\underset{\text{第二天}}{\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}} \Rightarrow \begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}=\underset{\text{第三天}}{\begin{bmatrix}\frac{4}{9}\\\frac{5}{9}\end{bmatrix}} \Rightarrow \begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{4}{9}\\\frac{5}{9}\end{bmatrix}=\underset{\text{第四天}}{\begin{bmatrix}\frac{23}{54}\\\frac{31}{54}\end{bmatrix}}$

∴第四天非下雨天的機率為$\frac{31}{54}$

14.甲報社每年保留 80% 的顧客，而轉向乙報社與丙報社訂購的顧客，分別占 10% 與 10%；乙報社每年保留 70% 的顧客，而轉向甲報社與丙報社訂購的顧客，分別占 20% 與 10%；丙報社每年保留 60% 的顧客，而轉向甲報社與乙報社訂購的顧客，分別占 10% 與 30%。若目前甲、乙、丙三報社的市場占有率分別為 20%、30%、50%，且顧客總人數不變：(1)試求其轉移矩陣＝________ (2)已知最後報社供應市場會趨於穩定，試問穩定狀態時，乙報社之市場占有率為________。

(解) (1)轉移矩陣$A=\begin{array}{c}\text{甲報}\quad\text{乙報}\quad\text{丙報}\\ \begin{bmatrix}0.8&0.2&0.1\\0.1&0.7&0.3\\0.1&0.1&0.6\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{甲報}\\\text{乙報}\\\text{丙報}\end{array}$

(2)設穩定狀態矩陣$x=\begin{bmatrix}a\\b\\1-a-b\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}0.8&0.2&0.1\\0.1&0.7&0.3\\0.1&0.1&0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\1-a-b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\1-a-b\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases}0.8a+0.2b+0.1(1-a-b)=a\\0.1a+0.7b+0.3(1-a-b)=b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-0.3a+0.1b=-0.1\\-0.2a-0.6b=-0.3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3a+b=-1\\2a+6b=3\end{cases}$

$\Rightarrow a=\frac{9}{20}$，$b=\frac{7}{20}$，乙報社市場占有率$=\frac{7}{20}\times 100\%=35\%$

15.設$A=[a_{ij}]_{9\times 9}$且$a_{ij}=\begin{cases}i，當 i\geq j\\0，當 i<j\end{cases}$，則 A 中所有元素之和為________。

(解) $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{19}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{29}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{91}&a_{92}&\cdots&a_{99}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\2&2&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\9&9&9&\cdots&9\end{bmatrix}$，所求為$1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2=\frac{9\times 10\times 19}{6}=285$

16.若方程組$\begin{cases} x+2y+z=-3 \\ 2x+y-z=-3 \\ 3x+2y-z=a \end{cases}$有解，求$a=$________。

解 方程組所對應的增廣矩陣為

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-2),\ \times(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & -4 & a+9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & a+9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(4)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+5 \end{bmatrix}$$

$\because$方程組有解　$\therefore a+5=0 \quad \Rightarrow \quad a=-5$