對話式 數學
複習 1～4 冊

12 回 空間中的平面與直線

班級：________ 座號：________
姓名：________ 得分：________

1.	$60°$	2.	3	3.	2	4.	(1) -2		(2) $(9,-6,-16,6)$
5.	17		$\begin{cases} x=17+t \\ y=1+2t，t\in R \\ z=3-5t \end{cases}$	6.	$(-6,9,-5)$	7.	$3x-y+2z+6=$	0	6
8.	(D)	9.	(C)	10.	(C)	11.	(B)(C)(E)	12.	(B)(C)(E)
13.	$2\sqrt{3}$	14.	-26		$(-11,0,-26)$	15.	$(2,2,2)$	16.	$13x-7y-4z+1=0$

一、概念題（共 10 格，每格 5 分）

1.求兩平面$2x-y+z=6$，$x+y+2z-3=0$的銳夾角為________。

(解) $\overrightarrow{n_1}=(2,-1,1)$，$\overrightarrow{n_2}=(1,1,2)$，$|\overrightarrow{n_1}|=\sqrt{6}$，$|\overrightarrow{n_2}|=\sqrt{6}$

$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|\cos\theta \Rightarrow 2-1+2=\sqrt{6}\times\sqrt{6}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}$，銳夾角為$60°$

2.兩平行平面$E_1：x-2y+2z-1=0$與$E_2：x-2y+2z+8=0$之間的距離為________。

(解) 所求$=\frac{|-1-8|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{9}{3}=3$

3.空間坐標中，三點$A(2,0,0)$、$B(0,-3,0)$、$C(0,0,-1)$，則點$(2,2,-3)$到平面ABC的距離為________。

(解) 平面ABC為$\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{-1}=1$，即$3x-2y-6z-6=0$ 所求$=\frac{|3\times2-2\times2-6\times(-3)-6|}{\sqrt{9+4+36}}=\frac{14}{7}=2$

4.直線$L：\begin{cases} x=3t+1 \\ y=t-5 \\ z=-2t+4 \end{cases}$，$t\in R$，(1)若$L$上有一點$A(4,a,b)$，則$a+b=$________

(2)若L與$\frac{x+m}{p}=\frac{y}{3}=\frac{z+n}{q}$相重合，則序組$(p,q,m,n)=$________。

(解) (1) $3t+1=4$得$t=1$，$y=-4$，$z=2$，故$a+b=-4+2=-2$

(2)①$\frac{3}{p}=\frac{1}{3}=\frac{-2}{q} \Rightarrow p=9$，$q=-6$

②$(-m,0,-n)$在L上 $\Rightarrow t=5$，則$x=16$，$z=-6$，得$m=-16$，$n=6$

5.平面$E：x+2y-5z=4$上有一點$P(k,1,3)$，則$k=$________，過P且垂直E的直線參數式為________。

(解) ①P代入得$k+2-15=4 \Rightarrow k=17$

②直線方向向量為E的法向量$(1,2,-5)$，所求為$\begin{cases} x=17+t \\ y=1+2t，t\in R \\ z=3-5t \end{cases}$

6.若直線$L：\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t，t\in R \\ z=2+t \end{cases}$與平面$2x+3y+2z-5=0$有交點，則交點坐標為________。

(解) L上動點代入平面有解 $\Rightarrow 2(1+t)+3(2-t)+2(2+t)-5=0$

$\Rightarrow 2+2t+6-3t+4+2t-5=t+7=0 \Rightarrow t=-7$，交點為$(-6,9,-5)$

7.設平面E的法向量$\vec{n}=(3,-1,2)$，且E在三軸上的截距和為1，則平面E的方程式為________，又平面E與三坐標軸所圍成四面體體積為________。

(解) ①設平面E為$3x-y+2z=k$，則截距為$\frac{k}{3}$、$-k$、$\frac{k}{2}$

$\frac{k}{3}-k+\frac{k}{2}=1 \Rightarrow k=-6$，得$E：3x-y+2z+6=0$

②三截距長為2、6、3，則四面體體積$=2\times6\times3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=6$

二、單一選擇題（共 3 題，每題 5 分）

________8.空間中兩點$O(0,0,0)$、$A(3,5,4)$，則$\overline{OA}$投影到下列哪一個線或面的長度為最長？

(A)y軸 (B)yz面 (C) $3x+5y+4z=0$
(D)$\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ (E)$\frac{x}{-1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{2}$。

(解) (A)A投影到y軸為$(0,5,0)$，投影長為5

(B)A投影到yz面為$(0,5,4)$，投影長為$\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}<7$

(C)$\because\overrightarrow{OA}$即$3x+5y+4z=0$的法向量 $\therefore\overline{OA}$投影到$3x+5y+4z=0$的長度為0

(D) $\overrightarrow{OA}$對$(2,2,1)$的正射影長為$|(3,5,4)|\times\frac{(3,5,4)\cdot(2,2,1)}{|(3,5,4)|\times|(2,2,1)|}=\frac{6+10+4}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{20}{3}$

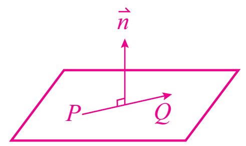
(E) $\overrightarrow{OA}$對$(-1,-2,2)$的正射影長為

$|(3,5,4)|\times\frac{(3,5,4)\cdot(-1,-2,2)}{|(3,5,4)|\times|(-1,-2,2)|}=\frac{|-3-10+8|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{5}{3}$ $\therefore$選(D)

________9.設P、Q為一平面$ax+by+cz-10=0$上之相異兩點，且$\overrightarrow{PQ}=(p,q,r)$，則$\overrightarrow{PQ}\cdot(a,b,c)=$？

(A) 10 (B) -10 (C) 0 (D) 1 (E) 5。

(解) $\because$平面法向量$\vec{n}=(a,b,c)$



$\vec{n}\perp\overrightarrow{PQ}$ $\therefore\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$

即$(a,b,c)\cdot\overrightarrow{PQ}=0$ $\therefore$選(C)

103MH408T

________10.直線L：$\begin{cases}x+2y+3z=6\\2x-3y-z=7\end{cases}$，下列何者可為 L 的方向向量？

(A) $(-1,1,1)$　　(B) $(1,-1,-1)$　　(C) $(1,1,-1)$

(D) $(-1,-1,-1)$　　(E) $(1,1,1)$。

解 方向向量$\vec{\ell}=\left(\begin{vmatrix}2&3\\-3&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&1\\-1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\2&-3\end{vmatrix}\right)=(7,7,-7)=7(1,1,-1)$　∴選(C)

三、多重選擇題（共 2 題，每題 5 分）

________11.設$P(-4,5,7)$為空間中的點，下列敘述哪些正確？

(A)P 到 x 軸的距離為$\sqrt{41}$　　(B)P 到 xy 平面的距離為 7

(C)若$Q(-4,2,3)$，則$\overline{PQ}=5$　　(D)P 點在平面$3x+y+2z=6$上

(E)P 點在直線$\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+2}{9}$上。

解 (A) P 到 x 軸距離為$\sqrt{5^2+7^2}=\sqrt{74}$，不合　(B)合　(C) $\overline{PQ}=\sqrt{0^2+3^2+4^2}=5$，合

(D) $P(-4,5,7)$代入平面，$3\cdot(-4)+5+2\cdot7=7\neq6$，不合

(E) $P(-4,5,7)$代入直線，$\frac{-4+2}{-2}=\frac{5-1}{4}=\frac{7+2}{9}=1$，合

∴選(B)(C)(E)

________12.空間中兩點$P(1,3,4)$、$Q(0,-1,-3)$，則下列哪些可表示$\overleftrightarrow{PQ}$的方程式？

(A) $8x-9y+4z=-3$

(B) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{7}$

(C) $x=1+t$，$y=3+4t$，$z=4+7t$，$t\in R$

(D) $x=1+t$，$y=4+3t$，$z=7+4t$，$t\in R$

(E) $\begin{cases}x-2y+z+1=0\\3x+y-z-2=0\end{cases}$。

解 (A)為含 P、Q 的平面，不合

(B) $\overrightarrow{QP}=(1,4,7)$，為過 P 且以$\overrightarrow{QP}$為方向向量的直線比例式，合

(C)為過 P 且以$\overrightarrow{QP}$為方向向量的直線參數式，合

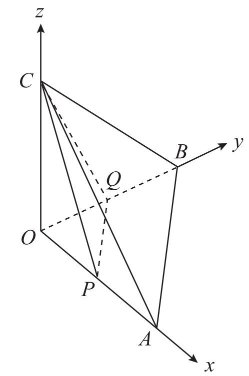
(D)該直線的方向向量為 $(1,3,4)$，不合

(E) $x-2y+z+1=0$代 P、Q，合；$3x+y-z-2=0$代 P、Q，合

⇒　為交於$\overleftrightarrow{PQ}$的兩面式　　∴選(B)(C)(E)

四、填充題（共 5 格，每格 5 分）

13.空間坐標如右圖，O 為原點，A、B、C 在三軸的正向上，且$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$，若 P、Q 依序為$\overline{OA}$、$\overline{OB}$的中點，若 O 到平面 ABC 的距離為 6，則 O 到平面 PQC 的距離為________。



解 設$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=2k$，則平面 ABC 為$\frac{x}{2k}+\frac{y}{2k}+\frac{z}{2k}=1$

平面 PQC 為$\frac{x}{k}+\frac{y}{k}+\frac{z}{2k}=1$

已知 O 到$x+y+z=2k$的距離為$\frac{|-2k|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{2k}{\sqrt{3}}=6$　∴$k=3\sqrt{3}$

∴O 到$2x+2y+z=2k$的距離為$\frac{|-2k|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{2k}{3}=2\sqrt{3}$，即為所求

14.空間坐標中，有兩道雷射光束相交會，其中一道雷射光從$A(1,3,-2)$朝$B(5,4,6)$發射，另一道雷射光從 $(6,0,a)$沿平行於 x 軸的方向發射，求$a=$__，其交會點坐標為____。

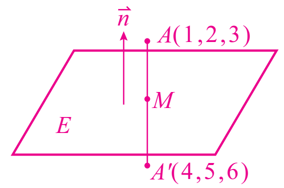
解 $A(1,3,-2)$，$B(5,4,6)$，$\overrightarrow{AB}=(4,1,8)$，

$\overleftrightarrow{AB}$：$\begin{cases}x=1+4t\\y=3+t\\z=-2+8t\end{cases}$，$t\in R$；另一道雷射為$\begin{cases}x=6+k\\y=0\\z=a\end{cases}$，$k\in R$

∵相交　∴$\begin{cases}x=1+4t=6+k\\y=3+t=0\\z=-2+8t=a\end{cases}$，得$t=-3$，$a=-26$，$k=-17$，代回得$\begin{cases}x=6-17=-11\\y=0\\z=-26\end{cases}$

∴交於 $(-11,0,-26)$

15.空間中若$A(1,2,3)$對平面$ax+by+cz-21=0$的對稱點為$A'(4,5,6)$，則序組 (a,b,c) 為________。



解 $\overrightarrow{A'A}=(-3,-3,-3)=-3(1,1,1)$

取平面法向量$\vec{n}=(1,1,1)$，$\overline{A'A}$中點$M(\frac{5}{2},\frac{7}{2},\frac{9}{2})$在平面 E 上

設平面方程式$x+y+z=d$

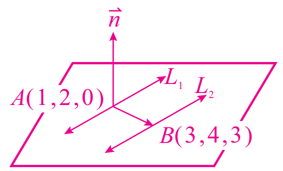
點 M 代入得$\frac{5}{2}+\frac{7}{2}+\frac{9}{2}=d$　⇒　$d=\frac{21}{2}$　⇒　平面方程式為$x+y+z-\frac{21}{2}=0$

⇒　$2x+2y+2z-21=0$

得$a=2$，$b=2$，$c=2$，因此序組$(a,b,c)=(2,2,2)$

16.空間中，兩平行直線L_1：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{5}$，$L_2$：$\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-3}{5}$，則包含$L_1$與$L_2$之平面 E 的方程式為________。

解 取L_1上點$A=(1,2,0)$，L_2上點$B=(3,4,3)$



$\overrightarrow{AB} = (2, 2, 3)$，$\overrightarrow{\ell_1} = (1, -1, 5)$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$且$\vec{n} \perp \overrightarrow{\ell_1}$

$\Rightarrow \quad \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{\ell_1} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (13, -7, -4)$

設平面方程式為$13x - 7y - 4z = d$

點$A(1, 2, 0)$代入得$13 - 14 - 0 = d \quad \therefore d = -1$

因此平面 E 的方程式$13x - 7y - 4z + 1 = 0$