

對話式 數學		5 排列、組合		班級：_____ 座號：_____
複習 1~4 冊				姓名：_____ 得分：_____
1. (1)(10,9)	(2) 10	2. (1) (E)	(2) (B)	(3) (C)(F)
3. (1) (D)	(2) (A)	(3) (G)	4. (D)	5. 1022
6. (B)	7. (C)	8. (D)	9. (B)(C)(E)	10. (C)(E)
11. 315	12. 56	13. 53	14. 7	15. 924

一、概念題 (共 10 格, 每格 5 分)

1. $a, b \in Z, 10 \geq a > b \geq 0$, 若:

(1) $P_a^{10} = P_b^{10}$, 則數對 $(a, b) =$ _____。

(2) 若 $C_a^{10} = C_b^{10}$, $a + b =$ _____。

2. m, n 為非負整數, 將下列(1)至(3)小題填入(A)至(F)的選項: (A) m 個相同物分給 n 個人的方法數 (B) m 個相異物取出 n 個的方法數 (C) m 種相異物取出 n 個的方法數 (D) m 種相異物選出 n 個可重複選取, 排成一列的方法數 (E) m 個相異物取出 n 個排成一列的方法數 (F) n 個相同物分給 m 個人的方法數。

(1) 若 $m \geq n$, 則 P_n^m 的涵義為 _____。(單選)

(2) 若 $m \geq n$, 則 C_n^m 的涵義為 _____。(單選)

(3) C_n^{m+n-1} 的涵義為 _____。(多選)

3. m, n 為非負整數, 將下列(1)至(3)小題填入(A)至(H)的選項 (均為單選):

(A) $\frac{m!}{n!(m-n)!}$ (B) $\frac{n!}{m!}$ (C) $\frac{m!}{n!}$ (D) $\frac{m!}{(m-n)!}$ (E) $\frac{n!}{m!(m-n)!}$ (F) n^m (G) m^n (H) $\frac{m!}{m}$ 。

(1) 若 $m \geq n$, 則 $P_n^m =$ _____。

(2) 若 $m \geq n$, 則 $C_n^m =$ _____。

(3) m 種相異物取出 n 個可重複選取, 排成一列的方法數為 _____。

4. $m, n \in N$, 則 $H_n^m =$ _____。

(A) C_n^{m+n} (B) C_{n-1}^{m+n} (C) C_{n+1}^{m+n} (D) C_n^{m+n-1} (E) C_n^{m+n+1} 。

5. $C_1^{10} + C_2^{10} + C_3^{10} + C_4^{10} + C_5^{10} + C_6^{10} + C_7^{10} + C_8^{10} + C_9^{10} =$ _____。

解: $(1+1)^{10} = C_0^{10} + C_1^{10} + \dots + C_9^{10} + C_{10}^{10} \Rightarrow 1024 = 1 + \text{所求} + 1 \Rightarrow \text{所求} = 1022$

二、單一選擇題 (共 3 題, 每題 5 分)

6. 7 件相同的物品, 全分給 10 個人, 每人可兼得, 則其分法有幾種?

(A) C_7^{10} (B) C_7^{16} (C) C_{10}^{16} (D) 10^7 (E) 7^{10} 。

解: 即 $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 7$ 的非負整數解個數 \therefore 為 C_7^{16} , 選(B)

7. 自 8 冊不同的英文書與 6 冊不同的中文書中, 取 2 冊英文書與 3 冊中文書排在書架上, 其方法有幾種?

(A) $P_2^8 \cdot P_3^6$ (B) $C_2^8 \cdot C_3^6 \cdot 2! \cdot 3!$ (C) $C_2^8 \cdot C_3^6 \cdot 5!$ (D) $C_2^8 \cdot 2! + C_3^6 \cdot 3!$ (E) $C_5^{15} \cdot 5!$ 。

解: 即 $\frac{C_2^8}{\text{取英文書}} \cdot \frac{C_3^6}{\text{取中文書}} \cdot \frac{5!}{\text{5本書排成一列}} \therefore$ 選(C)

8. 我國的機車牌照為六位的字母與數字, 原本前三位為英文字母、後三位為 0 至 9 的數字且個位不為 4, 如 $\boxed{UKX-571}$ 。經過十幾年後號碼不敷使用, 因此又設計出前三位為 0 至 9 的數字且個位不為 4, 末三位為英文字母, 如 $\boxed{425-NQG}$ 。請問在這些條件之下, 我國的機車牌照共可發出多少面?

(A) $26 \times 25 \times 24 \times 900$ (B) $26 \times 26 \times 26 \times 1000$ (C) $26 \times 26 \times 26 \times 900$
(D) $26 \times 26 \times 26 \times 900 \times 2$ (E) $(26 \times 26 \times 26 \times 900)^2$ 。

解: $(26 \times 26 \times 26) \times (10 \times 10 \times 9) + (10 \times 10 \times 9) \times (26 \times 26 \times 26) = 26 \times 26 \times 26 \times 900 \times 2$
前三位為字母 末三位為數字 前三位為數字 末三位為字母
 \therefore 選(D)

三、多重選擇題 (共 2 題, 每題 5 分)

9. 若數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$, 則稱為「遞增」, 請問下列各選項哪些正確?

(A) $P_7^7 = 1$ (B) $C_7^{10} = C_3^{10}$ (C) 數列 $P_1^n, P_2^n, P_3^n, \dots, P_n^n$ 為遞增的數列
(D) 數列 $C_1^n, C_2^n, C_3^n, \dots, C_n^n$ 為遞增的數列 (E) 數列 $C_1^{n+1}, C_1^{n+2}, C_1^{n+3}, \dots, C_3^{2n}$ 為遞增的數列。

解: (A) $P_7^7 = 7! = 5040$, 不合
(B) $C_7^{10} = \frac{10!}{7!3!} = C_3^{10}$, 合
(C) 即 $n, n(n-1), n(n-1)(n-2), \dots, n!$, 為遞增, 合
(D) 應先遞增再遞減, 不合
(E) 即 $n+1, (n+1) \times \frac{n+2}{2}, (n+1) \times \frac{n+2}{2} \times \frac{n+3}{3}, \dots$, 為遞增, 合

∴選(B)(C)(E)

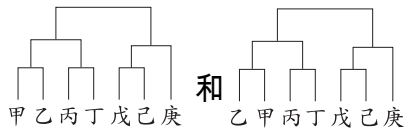
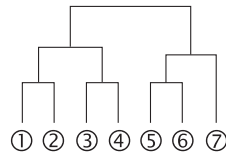
10. 關於 $(x - \frac{1}{x})^{10}$ 的展開式中，下列選項哪些正確？

- (A) 共有 10 項 (B) x^4 項的係數為 C_3^{10} (C) 常數項為 -252
 (D) x^{-10} 項的係數為 -1 (E) x 項的係數為 0。

解 (A) 應有 11 項，為 $C_0^{10}x^{10} + C_1^{10}x^9(-\frac{1}{x}) + C_2^{10}x^8(-\frac{1}{x})^2 + \dots + C_{10}^{10}(-\frac{1}{x})^{10}$
 (B) x^4 項 = $C_3^{10}x^7 \cdot (-\frac{1}{x})^3 = -C_3^{10}x^4$ ，應為 $-C_3^{10}$ ，不合
 (C) 常數項 = $C_5^{10}x^5 \cdot (-\frac{1}{x})^5 = -C_5^{10} = -252$ ，合
 (D) x^{-10} 項 = $C_{10}^{10}(-\frac{1}{x})^{10} = x^{-10}$ ，應為 1，不合
 (E) 展開式依次為 10 次，8 次，6 次，... ∴ x 項係數為 0，合
 ∴選(C)(E)

四、填充題 (共 5 格，每格 5 分)

11. 有七支球隊要排入右邊的賽程表，現在做好 ① ~ ⑦ 的號碼牌放入籤筒，再請七個球隊隊長來抽籤。若把抽籤的結果填入右邊的空格，則會有 $7! = 5040$ 種安排的情形，但其中有許多是重複的，如

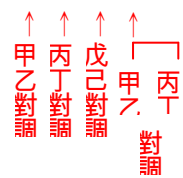


其實相同，若把重複的情形消去，

則共可排出 _____ 種不同的賽程。

《另解》 $C_4^7 C_3^3 \times \frac{C_2^2 C_2^2}{2} \times C_2^2 C_1^1 = 35 \times 3 \times 3 = 315$

解 $\frac{7!}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{5040}{16} = 315$



12. 自來水公司因為輸水管路施工，必須輪流供水，若計畫在接下來的 10 天中選擇 3 天停止供水，為避免影響民生，該停水的 3 天不得相連，則自來水公司共有 _____ 種選擇的方式。

解 有 7 天供水，共 8 個空隙，取 3 個空隙使其停水 ∴ 共有 $C_3^8 = 56$ 種選擇方式

13. 有 1、1、1、2、2、3、4 共七個數字，若從中取出四個排成四位數，請問共可排成 _____

種不同的偶數。

解 依同異來討論，且個位為 2 或 4 才可

全異：1、2、3、4，有 12 種

恰三同 $\begin{cases} 1, 1, 1, 2 \\ 1, 1, 1, 4 \end{cases}$ ，共 2 種

兩同兩同：1、1、2、2，共 $\frac{3!}{2!} = 3$ 種

兩同兩異 $\begin{cases} 1, 1, 2, 3 \Rightarrow \text{有 3 種} \\ 1, 1, 2, 4 \Rightarrow \text{有 6 種} \\ 1, 1, 3, 4 \Rightarrow \text{有 3 種} \\ 2, 2, 1, 3 \Rightarrow \text{有 6 種} \\ 2, 2, 1, 4 \Rightarrow \text{有 9 種} \\ 2, 2, 3, 4 \Rightarrow \text{有 9 種} \end{cases}$ ，共 36 種

∴ 共種 $12 + 2 + 3 + 36 = 53$

14. 行列式 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ ，其中 a, b, c, d 可為 1 或 2，則該行列式共有 _____ 種不同的值。

解 即 $ad - bc$

$$\begin{array}{ll} 1 \times 1 - 1 \times 1 \rightarrow 0 & 1 \times 2 - 1 \times 1 \rightarrow 1 \\ 1 \times 1 - 1 \times 2 \rightarrow -1 & 1 \times 2 - 2 \times 2 \rightarrow -2 \\ 1 \times 1 - 2 \times 2 \rightarrow -3 & 2 \times 2 - 1 \times 1 \rightarrow 3 \\ & 2 \times 2 - 1 \times 2 \rightarrow 2 \end{array}$$

∴ 有 0、±1、±2、±3，共 7 種

15. 把 $(x + y)^{12}$ 乘開整理，發現有一項的係數和其他項的係數都不同，請問這一項的係數為 _____。

解 該項為 $C_6^{12}x^6y^6 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}x^6y^6 = 924x^6y^6 \therefore$ 所求為 924