

| | | | | |
|----------------------------------|------------------|------------------------|---------------|-------------------|
| 對話式 數學 | | 4 數列與級數 | | 班級：_____ 座號：_____ |
| 複習 1~4 冊 | | | | 姓名：_____ 得分：_____ |
| 1. (1)16 | (2)256 | 2. 丙 < 甲 < 乙 | 3. 82 | 860 |
| 4. $\frac{256}{17}$ | 5. $\frac{1}{3}$ | 6. (1) $\frac{10}{11}$ | (2) 99 | 7. 33 |
| 8. (E) | 9. (B) | 10. (B) | 11. (A)(C)(D) | 12. (A)(B)(D) |
| 13. $(\frac{3}{7}, \frac{6}{7})$ | 14. 670 | 15. 2450 | 16. 20825 | 17. 476 |

一、概念題 (共 10 格, 每格 5 分)

1. 數列 $\{a_n\}$, 已知 $a_{13} = 4$, 若:

(1) $\{a_n\}$ 為等差, 求 $a_5 + a_9 + a_{17} + a_{21} =$ _____。

(2) $\{a_n\}$ 為等比, 求 $a_5 \cdot a_9 \cdot a_{17} \cdot a_{21} =$ _____。

解 (1) $a_5 + a_{21} = 2a_{13} = 8 = a_9 + a_{17}$ \therefore 所求 = 16

(2) $a_5 \times a_{21} = a_9 \times a_{17} = a_{13}^2 = 16$ \therefore 所求 = $16^2 = 256$

2. 甲、乙、丙三人存錢, 甲從今天起每日存 1 元, 乙從今天起每隔一天存 2 元, 丙從明天起每隔一天存 2 元。若按日以複利計算, 則 10 天後三人都存入 10 元, 所得的本利和由小而大為 _____。

解 設利率為 r , 則甲 = $\sum_{k=1}^{10} 1 \times (1+r)^k$, 乙 = $\sum_{k=1}^5 2 \times (1+r)^{2k}$, 丙 = $\sum_{k=1}^5 2 \times (1+r)^{2k-1}$
比較得 丙 < 甲 < 乙

3. 已知 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 9$, 則 $\sum_{k=1}^{10} (3a_k + k) =$ _____, $\sum_{k=1}^{10} (10a_k + 2k^2) =$ _____。

解 ① 所求 = $3 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} k = 3 \times 9 + \frac{10 \times 11}{2} = 17 + 55 = 82$

② 所求 = $10 \sum_{k=1}^{10} a_k + 2 \sum_{k=1}^{10} k^2 = 10 \times 9 + 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{2} = 90 + 770 = 860$

4. 若數列 $\{a_n\}$ 滿足 $S_n = \frac{2}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \frac{8}{a_3} + \dots + \frac{2^n}{a_n} = n^2 + 2n$, 求 $a_8 =$ _____。

解 $S_8 = 64 + 16 = 80$, $S_7 = 49 + 14 = 63$

$\frac{2^8}{a_8} = S_8 - S_7 = 17 \Rightarrow a_8 = \frac{256}{17}$

5. 數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1 = 27$, $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n (n \in N)$, 則公比 = _____。

6. (1) 求 $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)} =$ _____ (2) 若 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = 9$, 則 $n =$ _____。

解 (1) 所求 = $\sum_{k=1}^{10} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$

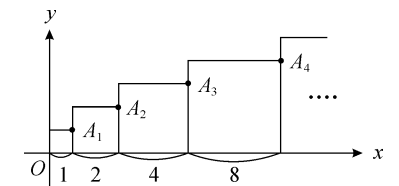
(2) 所求 = $\sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1} - 1 = 9$
 $\Rightarrow \sqrt{n+1} = 10 \Rightarrow n+1 = 100 \Rightarrow n = 99$

7. 若循環小數 $2.6\overline{12}$ 乘上正整數 k 之後變為有限小數, 則最小的 k 值為 _____。

解 $2.6\overline{12} = \frac{2612-26}{990} = \frac{2586}{990} = \frac{431}{165} = \frac{431}{33 \times 5}$, 最少乘 33 才能變有限小數

二、單一選擇題 (共 3 題, 每題 5 分)

8. 如右圖, 有 n 個正方形並列在 x 軸正向上, 其邊長依序為 1、2、4、8、 \dots 、 2^{n-1} , 則各正方形的右上頂點 $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$, 所在位置的 x, y 值為下列哪個函數關係?



(A) $y = 2^x$ (B) $y = 2^x - 1$ (C) $y = \log_2 x$ (D) $x - y = 0$
(E) $x - 2y + 1 = 0$ 。

解 $A_n(x_n, y_n)$ 的 $\begin{cases} x_n = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = \frac{1 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1 \\ y_n = 2^{n-1} \end{cases}$
 $\therefore x_n = 2y_n - 1$, 即 $x - 2y + 1 = 0$, 選(E)

9. 等差數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和為 S_n , 若 $S_1 > S_2 > S_3 > S_4 < S_5 < S_6 < S_7 < \dots$, 則下列選項何者正確?

(A) 公差為負且前 4 項為負 (B) 公差為正且前 4 項為負
(C) 公差為負且前 4 項為正 (D) 數列 $\{a_n\}$ 各項均大於 0
(E) 數列 $\{a_n\}$ 各項均小於 0。

解 $a_2 = S_2 - S_1 < 0$, $a_3 = S_3 - S_2 < 0$, $a_4 = S_4 - S_3 < 0$, $a_5 = S_5 - S_4 > 0$, \dots ,
得公差 $d = a_5 - a_4 > 0$
 $\therefore a_1, a_2, a_3, a_4$ 為負, a_5, a_6, a_7, \dots 為正, 選(B)

10. 設 a, b, c, d 四正數成等比數列，若 $a + b = 8, c + d = 72$ ，則公比為何？

- (A)2 (B)3 (C)-3 (D) $\frac{3}{2}$ (E)4。

解 設公比為 r ，則 $b = ar, c = ar^2, d = ar^3$

$$a + b = 8 \Rightarrow a + ar = 8 \Rightarrow a(1+r) = 8 \dots ①$$

$$c + d = 72 \Rightarrow ar^2 + ar^3 = 72 \Rightarrow ar^2(1+r) = 72 \dots ②$$

$$\text{②} \div \text{①} \text{ 得 } \frac{ar^2(1+r)}{a(1+r)} = 9 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = \pm 3 \text{ (負不合)}, \text{選(B)}$$

三、多重選擇題 (共 2 題，每題 5 分)

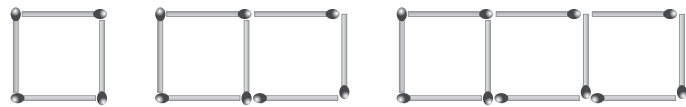
11. 等差數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = pn^3 + qn^2 + rn + s$ ，其中 p, q, r, s 為定數，則下列選項哪些正確？

- (A) $p = 0$ (B) $q = 0$ (C) $s = 0$ (D)公差為 $2q$ (E)首項為 r 。

$$\text{解 } S_n = \frac{2a_1(n-1)d}{2} \times n = \frac{dn^2 + (2a_1-d)n}{2} = \frac{d}{2} \times n^2 + \frac{2a_1-d}{2} \times n$$

$$\text{得 } p = s = 0, q = \frac{d}{2}, \text{公差 } d = 2q, \text{而首項 } a_1 = S_1 = p + q + r + s = q + r \therefore \text{選(A)(C)(D)}$$

12. 用火柴拼成下列圖形：



a_n 表示第 n 個圖形的火柴數，請問下列選項哪些正確？

- (A) $a_5 = 16$ (B) $a_7 = 22$ (C) $\{a_n\}$ 不是等差數列
(D) a_{20} 是質數 (E)若有 100 根火柴，可拼成 34 個正方形。

解 由圖形觀察 $a_1 = 4, a_2 = a_1 + 3, a_3 = a_2 + 3, \dots$ 得 $a_n = a_{n-1} + 3$

數列 $\{a_n\}$ 是首項為 4，公差為 3 的等差數列

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 4 + 3(n-1) = 3n + 1$$

$$\text{(A)} a_5 = 15 + 1 = 16, \text{合} \quad \text{(B)} a_7 = 21 + 1 = 22, \text{合}$$

(C) $\{a_n\}$ 是等差數列，不合

(D) $a_{20} = 61$ 是質數，合

$$\text{(E)} 3n + 1 = 100 \Rightarrow n = 33, \text{可拼成 33 個正方形，不合}$$

\therefore 選(A)(B)(D)

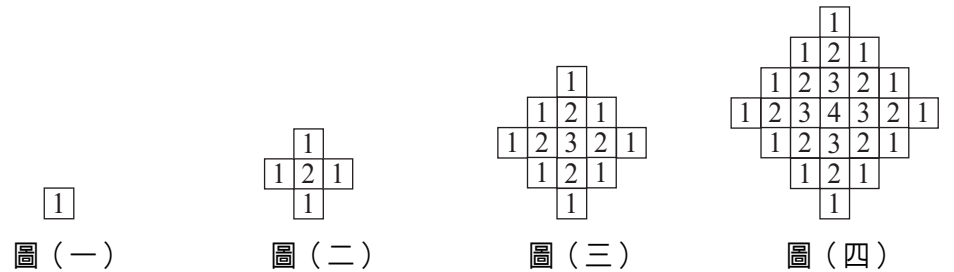
四、填充題 (共 5 格，每格 5 分)

13. 若數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1 = \frac{4}{7}$ 且 $a_{n+1} = \frac{7}{2}a_n(1 - a_n), n \geq 1$ ，求數對 $(a_{101}, a_{202}) =$ _____。

$$\text{解 } a_2 = \frac{7}{2} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{7}, a_3 = \frac{7}{2} \times \frac{6}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{3}{7}, a_4 = \frac{7}{2} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{6}{7}, a_5 = \frac{7}{2} \times \frac{6}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{3}{7}, \dots$$

$$\therefore a_2 = a_4 = a_6 = \dots = a_{202} = \frac{6}{7}, a_3 = a_5 = a_7 = \dots = a_{101} = \frac{3}{7}, \text{所求} = \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$$

14. 觀察下列圖 (一) 到圖 (四) 的數字排列規則，若按此規律，則圖 (十) 的所有數字之和為 _____。



解 圖 (十) 有 1 個 10，4 個 9，8 個 8，12 個 7，...，36 個 1

$$\begin{aligned} \text{所求} &= 1 \times 10 + 4 \times 9 + 8 \times 8 + 12 \times 7 + \dots + 36 \times 1 = (1 \times 36 + 2 \times 32 + 3 \times 28 + \dots + 9 \times 4) + 10 \times 1 \\ &= \sum_{k=1}^9 k(-4k + 40) + 10 = -4 \sum_{k=1}^9 k^2 + 40 \sum_{k=1}^9 k + 10 = -1140 + 1800 + 10 = 670 \end{aligned}$$

15. 兩個等差數列 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ ， $a_{10} + b_{50} = 31, b_1 + a_{41} = 67$ ，求數列 $\{a_n + b_n\}$ 的前 50 項之和為 _____。

$$\text{解 } \therefore \{a_n\} \quad \therefore a_1 + a_{50} = a_{10} + a_{41}$$

$$\therefore \text{所求} = \frac{(a_1+b_1)+(a_{50}+b_{50})}{2} \times 50 = \frac{b_1+b_{50}+a_{10}+a_{41}}{2} \times 50 = \frac{31+67}{2} \times 50 = 49 \times 50 = 2450$$

16. 從 1 到 50 的自然數中，所有奇數平方和為 _____。

$$\text{解 } 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 47^2 + 49^2 = (1^2 + 2^2 + \dots + 50^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 50^2)$$

$$= (1^2 + 2^2 + \dots + 50^2) - 4(1^2 + 2^2 + \dots + 25^2) = \frac{50 \times 51 \times 101}{2} - 4 \times \frac{25 \times 26 \times 51}{6}$$

$$= 42925 - 22100 = 20825$$

17. 等差數列 $\{a_n\}$ 共有 10 項， $a_1 = 5, a_2 = 7$ ，任取兩項相加得 $a_1 + a_2, a_1 + a_3, \dots, a_9 + a_{10}$ ，再把重複的數字消去，則所剩的數字由小而大也成等差，請問這個新的等差級數之和為 _____。

$$\text{解 } \{a_n\} = 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, \text{兩兩相加得}$$

$$12, 14, 16, \dots, 28, 16, 18, \dots, 30, \dots, 44$$

$$\begin{array}{ccccccc} | & | & | & & | & | & | \\ 5+7 & 5+9 & 5+11 & & 5+23 & 7+9 & 7+11 \\ & & & & & & & & & & | & | \\ & & & & & & & & & & 7+23 & 21+23 \end{array}$$

去掉重複的和並由小而大得 12, 14, 16, ..., 44, 共 17 項, 所求 = $\frac{12+44}{2} \times 17 = 28 \times 17 = 476$