

對話式 數學		2 多項式函數		班級：_____ 座號：_____
複習 1~4 冊				姓名：_____ 得分：_____
1. -2036	$3x^2 + 4x$	2. -11	3. $-9 + 2i$	4. $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm 5, \pm 7$
$-\frac{35}{2}$	5. 五	$x = 1, 3$ 或 $x \geq 7$	6. (0, 0)	$2 + 3i$
7. (E)	8. (B)	9. (C)	10. (C)(E)	11. (A)(C)(D)
12. 17	13. (-6, 8, 2, -4)	14. (-6, 8)	15. $-28x + 17$	16. (1, 3, -2, 5)

一、概念題 (共 10 格, 每格 5 分)

1. 多項式  $x^{11} + 3x^2$  除以  $x + 2$  的餘式為 \_\_\_\_\_, 除以  $x^5 + 2$  的餘式為 \_\_\_\_\_。

解 ① 所求  $= f(-2) = (-2)^{11} + 3(-2)^2 = -2048 + 12 = -2036$

② 令  $x^5 = -2$ , 則  $x^{11} + 3x^2 = (x^5)^2x + 3x^2 + 4x$

2.  $f(x) = 3x^4 + 14x^3 - 19x^2 + 1$ ,  $f\left(-\frac{2}{3}\right) =$  \_\_\_\_\_。

解  $\begin{array}{r} 3+14-19+0+1 \\ -2-8+18-12 \\ \hline 3+12-27+18-11 \end{array} \Big| -\frac{2}{3}$

3. 設  $i = \sqrt{-1}$ ,  $f(x) = x^{57} - 2x^{36} + 7x^{18} - x^7$ , 求  $f(i) =$  \_\_\_\_\_。

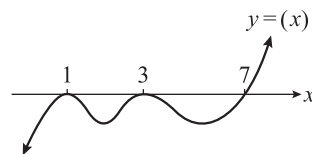
解  $i^4 = 1$ ,  $f(i) = (i^4)^{14} \cdot i - 2 \cdot (i^4)^9 + 7 \cdot (i^4)^4 \cdot i^2 - i^4 \times i^3 = i - 2 - 7 + i = -9 + 2i$

4.  $a, b \in Z$ , 方程式  $(2x^3 + ax^2 + 5)(x^3 + bx - 7) = 0$  的所有可能最簡有理根 (即分數根) 為 \_\_\_\_\_, 此方程式共有六個複數根 (若有重根, 則重複計算), 此六個根的乘積為 \_\_\_\_\_。

解 ① 由牛頓定理得所有可能有理根為  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm 5, \pm 7$

② 由根與係數關係得六根乘積  $= -\frac{5}{2} \times 7 = -\frac{35}{2}$

5. 多項式  $f(x)$  的圖形如右, 若方程式  $f(x) = 0$  沒有虛根, 則  $f(x)$  的次數最少可為 \_\_\_\_\_ 次, 而不等式  $f(x) \geq 0$  的解則為 \_\_\_\_\_。



解 ①  $f(x)$  在  $x = 1$  及  $x = 3$  有重根, 最少次數為  $2 + 2 + 1 = 5$

② 看略圖得  $f(x) \geq 0$  的解為  $x = 1, 3$  或  $x \geq 7$

6. 實係數多項式  $f(x)$ , 若  $\begin{cases} f(1+i) + f(1-i) = 4 + ai \\ f(1+i) - f(1-i) = b + 6i \end{cases}$ , 其中  $i = \sqrt{-1}$ ,  $a, b \in R$ , 則數對  $(a, b) =$  \_\_\_\_\_, 且  $f(1+i) =$  \_\_\_\_\_。

解 令  $f(1+i) = c + di$ , 則  $f(1-i) = c - di$ , 相加相減只剩實部與虛部

故  $f(1+i) + f(1-i) = 4$  及  $f(1+i) - f(1-i) = 6i$ , 得  $(a, b) = (0, 0)$  且  $f(1+i) = 2 + 3i$

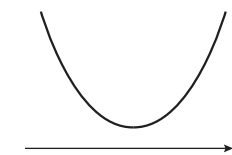
二、單一選擇題 (共 3 題, 每題 5 分)

7. 右圖的拋物線是下列哪一個二次函數的圖形?

(A)  $y = 3x^2 + 2x - 1$  (B)  $y = -x^2 + 4x - 6$

(C)  $y = 4x^2 + 12x + 9$  (D)  $y = -2x^2 + 3x + 1$

(E)  $y = x^2 - 4x + 5$



解 ①: 開口朝上  $\therefore$  (B)(D) 不合

②: 與  $x$  軸不相交  $\therefore$  判別式應小於 0

(A)  $D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) > 0$

(C)  $D = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$

(E)  $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$

$\therefore$  選 (E)

8. 若  $a, b$  為方程式  $x^2 + 3x + 1 = 0$  之兩根, 則計算  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$  的值為何?

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -5 (E)  $\sqrt{5}$

解 由判別式知  $a, b \in R$ , 由根與係數知  $a + b = -3$  且  $ab = 1 \therefore a < 0$  且  $b < 0$ , 則

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = a + b + 2\sqrt{ab} = (-3) + 2 \cdot \sqrt{1} = -3 + 2 = -1$

$\therefore$  選 (B)

9.  $f(x)$  為實係數多項式, 若  $f(1), f(3), f(5), f(9)$  的函數值為正數,  $f(0), f(4), f(6), f(7), f(11)$  的函數值為負數, 且  $f(2+i) = 0, i = \sqrt{-1}$ , 則  $f(x)$  的次數至少為幾次?

(A) 6 次 (B) 7 次 (C) 8 次 (D) 9 次 (E) 10 次。

解  $y = f(x)$  與  $x$  軸至少有 6 個交點, 加上兩個共軛虛根

$\therefore f(x)$  至少為  $6 + 2 = 8$  次, 選 (C)



三、多重選擇題（共 2 題，每題 5 分）

10. 設  $f(x) = x^4 + ax^2 + bx^2 + cx + d$ ，已知  $f(-2i) = f(1+2i) = f(-3) = 0$ ， $i = \sqrt{-1}$ ，則以下的推論哪些正確？

- (A)  $f(2i) = 0$  (B)  $f(1-2i) = 0$  (C)  $f(2-a) = 0$  (D) 若實數  $p, q$  滿足  $f(p) \cdot f(q) < 0$ ，則在  $p, q$  之間可找到實數  $r$  滿足  $f(r) = 0$  (E)  $a, b, c, d$  至少有一個為虛數。

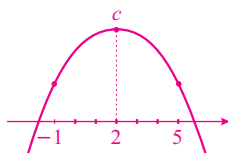
**【詳】** 若  $f(x)$  為實係數，則  $f(x) = 0$  有五個根，但  $f(x) = 0$  只到四次  
 $\therefore f(x)$  應為虛係數，則虛根不一定成對，也不能用勘根定理  
 由根與係數得四根之和為  $-a = (-2i) + (1+2i) + (-3) + a$   
 $\therefore$  另一根  $a = 2 - a$ ，得  $f(2-a) = 0$   $\therefore$  選(C)(E)

11. 二次函數  $f(x) = a(x+b)^2 + c$ ，其中  $a, b, c$  為實數， $f(-1) = f(5) < c$ ，則下列哪些選項為真？

- (A)  $a < 0$  (B)  $b = 2$  (C)  $c = f(2)$  (D)  $f(1) > f(4)$  (E)  $f(-3) < f(7)$ 。

**【詳】** 如右圖

- (A) 開口必朝下，合 (B) 頂點在  $x=2$  處，應為  $b=-2$ ，不合  
 (C)  $f(x)$  的  $Max = f(2) = c$ ，合 (D)  $f(1) = f(3) > f(4)$ ，合  
 (E)  $\therefore 2$  為  $-3$  與  $7$  的中點  $\therefore$  應為  $f(-3) = f(7)$ ，不合  
 故選(A)(C)(D)



四、填充題（共 5 格，每格 5 分）

12. 不等式  $(x^2 - 4x + 2)(2x - 5)(2x - 37) \leq 0$  有 \_\_\_\_\_ 個整數解。

**【詳】**  $(x^2 - 4x + 2) = 0$  根為  $\frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$   
 得  $2 - \sqrt{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$  或  $2 + \sqrt{2} \leq x \leq \frac{37}{2}$   
 $\therefore \sqrt{2} \approx 1.414 \therefore x = 1, 2, 4, 5, 6, \dots, 18$ ，共 17 個整數

13. 已知三次多項式  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  的圖形通過  $(-1, 8)$ ， $(0, -4)$ ，並在  $(1, 0)$  處與  $x$  軸相切，試求序組  $(a, b, c, d) =$  \_\_\_\_\_。

**【詳】**  $\therefore$  切  $x$  軸於  $x=1 \therefore x=1$  為  $f(x) = 0$  的二重根，即  $f(x)$  有  $(x-1)^2$  的因式

設  $f(x) = (x-1)^2(px+q)$ ， $f(-1) = 4(-p+q) = 8$   
 得  $-p+q = 2$ ， $f(0) = 1 \cdot (0+q) = q = -4$ ，則  $p = -6$   
 $\therefore f(x) = (x-1)^2(-6x-4) = -6x^3 + 8x^2 + 2x - 4$ ， $(a, b, c, d) = (-6, 8, 2, -4)$

14.  $a, b \in Z$ ，二次多項方程式  $f(x) = x^2 + ax + b = 0$  的根均為有理根，若  $f(\frac{3}{2}) \cdot f(3) < 0$ ， $f(\pi) \cdot f(\sqrt{19}) < 0$ ，則數對  $(a, b) =$  \_\_\_\_\_。

**【詳】** 由牛頓法得知有理根的分母必為 1  $\therefore$  其有理根必為整數根  
 $\therefore f(\frac{3}{2}) \cdot f(3) < 0 \therefore$  在  $\frac{3}{2}, 3$  之間有根，即  $x=2$  為根  
 $\therefore f(\pi) \cdot f(\sqrt{19}) < 0 \therefore$  在  $\pi, \sqrt{19}$  之間有根，即  $x=4$  為根  
 得  $x^2 + ax + b = (x-2)(x-4) = x^2 - 6x + 8$ ， $a = -6$ ， $b = 8$

15. 若  $f(x+1) = (x+2)^3 + 3(x-1)^2 - 7(2x+1) - 15$ ，求  $f(x)$  除以  $(x^2 + 2x - 3)$  的餘式為 \_\_\_\_\_。

**【詳】** 設  $f(x) = (x+3)(x-1) \cdot Q(x) + (ax+b)$ ，所求即  $ax+b$   
 $x=0$  代入得  $f(0+1) = 8+3-7-15 = -11$ ，得  $f(1)a+b = -11 \dots \textcircled{1}$   
 $x=-4$  代入得  $f(-4+1) = (-8)+75-(-49)-15 = 101$ ，得  $f(-3) = -3a+b = 101 \dots \textcircled{2}$   
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$  得  $4a = -11 - 101 \Rightarrow 4a = -112 \Rightarrow a = -28$ ， $b = 17$   
 $\therefore$  所求  $= -28x + 17$

16. 小明利用綜合除法要把  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  表示成  $(2x+1)$  的多項式，右邊是他處理的過程，顯然他忘記老師的叮嚀，沒有把過程中所得的商除以 2，所得  $f(x) = 8(2x+1)^3 + 12(2x+1)^2 - 4(2x+1) + 5$  是錯誤的，若正確的答案為  $f(x) = p(2x+1)^3 + q(2x+1)^2 + r(2x+1) + s$ ，請問序組  $(p, q, r, s) =$  \_\_\_\_\_。

$+a$	$+b$	$+c$	$+d$	} $-\frac{1}{2}$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\textcircled{+5}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		$-\frac{1}{2}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\textcircled{-4}$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$-\frac{1}{2}$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\textcircled{+8}$ $\textcircled{+12}$	

**【詳】** 由小明的過程知正確的  $f(x)$  為  
 $f(x) = 8\left(x+\frac{1}{2}\right)^3 + 12\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(x+\frac{1}{2}\right) + 5$   
 $\therefore f(x) = (2x+1)^3 + 3(2x+1)^2 - 2(2x+1) + 5$  為正確的  
 $\therefore (p, q, r, s) = (1, 3, -2, 5)$

