

對話式 數學		7 數與式			班級：_____ 座號：_____
複習 1~4 冊					姓名：_____ 得分：_____
1. 1	2. $\frac{9}{275}$	3. $x > \frac{4}{3}$ 或 $x < -2$	4. 24	5. $5\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$	
6. (3, 2)	7. -60	8. $c < b < a$	9. $k < 8$	10. 9	
11. (D)	12. (B)	13. (B)	14. (A)(C)	15. (A)(E)	
16. $\frac{47}{2}$	17. (-2, 8)	18. $\frac{3}{2}$	19. $x < \frac{4}{3}$	20. 34	

一、概念題 (共 10 格, 每格 5 分)

1. 設 a, b 為有理數, 且 $(a + b\sqrt{2})(1 + 2\sqrt{2}) = -1 + 5\sqrt{2}$, 則 $a + 2b =$ _____。

【解】展開合併得 $(a + 4b) + (2a + b)\sqrt{2} = -1 + 5\sqrt{2}$

則 $a + 4b = -1$ 且 $2a + b = 5$, 解得 $a = 3, b = -1$, 得 $a + 2b = 3 - 2 = 1$

2. 將循環小數 $0.03\overline{27}$ 化成最簡分數為 _____。

【解】 $0.03\overline{27} = \frac{327-3}{9900} = \frac{324}{9900} = \frac{9}{275}$

3. x 為實數, 若 $|3x + 1| > 5$, 則 x 之範圍為 _____。

【解】原式 $\Rightarrow 3x + 1 > 5$ 或 $3x + 1 < -5 \Rightarrow x > \frac{4}{3}$ 或 $x < -2$

4. 設 a, b 為正整數且 $3a + 2b = 24$, 則 ab 最大值為 _____。

【解】用算幾, $\frac{3a+2b}{2} \geq \sqrt{3a \times 2b} \Rightarrow \frac{24}{2} = 12 \geq \sqrt{6ab} \Rightarrow ab \leq \frac{12^2}{6} = 24$

5. 設 $A(\sqrt{2}), B(\sqrt{3}), C(x)$ 為數線上三點且 C 在 \overline{AB} 上, 若 $\overline{AC} : \overline{CB} = \sqrt{3} : \sqrt{2}$, $x =$ _____。

【解】 $\overline{AC} : \overline{CB} = (x - \sqrt{2}) : (\sqrt{3} - x) = \sqrt{3} : \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}x - 2 = 3 - \sqrt{3}x \Rightarrow (\sqrt{3} + \sqrt{2})x = 5$
 $\Rightarrow x = 5\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$

6. a, b 為實數, $\sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})^2} + \frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$, 數對 $(a, b) =$ _____。

【解】左式 = $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |\sqrt{3} - 2\sqrt{2}| + \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

$\therefore (a, b) = (3, 2)$

7. $f(x) = (x - 2)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4)$, 則 $f(\sqrt[3]{2}) =$ _____。

【解】 $f(x) = (x^3 - 8)(x^3 + 8) \Rightarrow f(\sqrt[3]{2}) = (2 - 8)(2 + 8) = -60$

8. 設 $a = \sqrt{10} - 3, b = \sqrt{11} - \sqrt{10}, c = \sqrt{12} - \sqrt{11}$, 則 a, b, c 三數大小關係為 _____。

【解】 $\frac{1}{a} = \sqrt{10} + \sqrt{9}, \frac{1}{b} = \sqrt{11} + \sqrt{10}, \frac{1}{c} = \sqrt{12} + \sqrt{11} \therefore \frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c} \therefore c < b < a$

9. 若方程式 $|x - 3| + |x + 5| = k$ 無解, 則 k 的範圍為 _____。

【解】 $|x - 3| + |x + 5| = |3 - x| + |x + 5| \geq |3 - x + x + 5| = 8 \therefore k < 8$ 時方程式無解

10. 將 $\frac{4}{7}$ 化為小數時, 若小數點後第 n 位數以 $f(n)$ 表示, 則 $f(2011) + f(100) =$ _____。

【解】 $\frac{4}{7} = 0.\overline{571428}$, 6 位循環 $\therefore f(2011) = f(1) = 5, f(100) = f(4) = 4$, 所求 = 9

二、單一選 7 擇題 (共 3 題, 每題 5 分)

_____ 11. 下列哪一個不是無理數?

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) π (C) 0.1010010001... (D) $2.1\overline{37}$ (E) $4 + \sqrt{3}$ 。

【解】循環小數可化為分數 \therefore 選(D)

_____ 12. 設 $a = \sqrt{6 + \sqrt{34}}$, 則 a 值在哪兩個連續整數之間?

(A) 2 與 3 (B) 3 與 4 (C) 4 與 5 (D) 5 與 6 (E) 6 與 7。

【解】 $5 < \sqrt{34} < 6 \Rightarrow 11 < 6 + \sqrt{34} < 12$
 $\Rightarrow \sqrt{11} < \sqrt{6 + \sqrt{34}} < \sqrt{12} \Rightarrow 3 < \sqrt{6 + \sqrt{34}} < 4$
 \therefore 選(B)

_____ 13. $a, b \in R, a < b, P = \frac{2a+5b}{7}, Q = \frac{a+5b}{6}, R = \frac{5a+9b}{14}$, 則下列 P, Q, R 三數大小關係何者正確?

(A) $P < Q < R$ (B) $R < P < Q$ (C) $Q < P < R$ (D) $R < Q < P$ (E) $Q < R < P$ 。

【解】 $[7, 6, 14] = 42$

$P = \frac{2a+5b}{7} = \frac{12a+30b}{42}, Q = \frac{a+5b}{6} = \frac{7a+35b}{42}, R = \frac{5a+9b}{14} = \frac{15a+27b}{42}$

$\therefore R < P < Q$ \therefore 選(B)

三、多重選擇題 (共 2 題, 每題 5 分)

_____ 14. 關於數的敘述, 下列選項哪些正確?

- (A) 若 a^2 為有理數, 且 a^3 為有理數, 則 a 為有理數
- (B) 若 a 是有理數, b 是無理數, 則 ab 為無理數
- (C) 若 $a+b$ 與 $a-b$ 都是有理數, 則 a, b 都是有理數
- (D) 若 a, b 都是無理數, 則 ab 為無理數
- (E) 若 a, b 都是無理數, 則 $a+b$ 為無理數。

解析 (A) $a = \frac{a^3}{a^2} \in Q$, 合 (B) 令 $a = 0$, 則 $ab = 0 \in Q$, 不合 (C) 設 $a+b = q_1, a-b = q_2$,
得 $a = \frac{q_1+q_2}{2} \in Q, b = \frac{q_1-q_2}{2} \in Q$, 合 (D) $a = 2 + \sqrt{3}, b = 2 - \sqrt{3}, ab = 4 - 3 = 1 \in Q$,
不合 (E) $a = 2 + \sqrt{3}, b = 2 - \sqrt{3}, a+b = 4 \in Q$, 不合
 \therefore 選(A)(C)

_____ 15. $x, y \in R$ 且滿足 $|x-3| \leq 4$ 與 $|y+7| \leq 5$, 下列各式範圍哪些正確?

- (A) $-13 \leq x+y \leq 5$ (B) $9 \leq x-y \leq 11$ (C) $1 \leq x^2 \leq 49$ (D) $0 \leq y^2 \leq 144$
- (E) $-\frac{7}{2} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{1}{2}$

解析 $|x-3| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x-3 \leq 4 \Rightarrow -1 \leq x \leq 7$
 $|y+7| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq y+7 \leq 5 \Rightarrow -12 \leq y \leq -2$
(A) $-13 \leq x+y \leq 5$, 合
(B) $2 \leq -y \leq 12 \Rightarrow 1 \leq x+(-y) \leq 19 \Rightarrow 1 \leq x-y \leq 19$, 不合
(C) $-1 \leq x \leq 7 \therefore x$ 可以為 0 $\therefore 0^2 \leq x^2 \leq 49$, 不合
(D) $-12 \leq y \leq -2 \Rightarrow 4 \leq y^2 \leq 144$, 不合
(E) $-12 \leq y \leq -2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{12}; -\frac{7}{2} \leq x \cdot \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{7}{2} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{1}{2}$, 合
 \therefore 選(A)(E)

四、填充題 (共 5 格, 每格 5 分)

16. $a, b \in R, a+b=4, ab=-1$, 則 $\frac{b^2}{a+1} + \frac{a^2}{b+1} =$ _____。

解析 $\frac{b^2}{a+1} + \frac{a^2}{b+1} = \frac{b^2(b+1)+a^2(a+1)}{(a+1)(b+1)} = \frac{(a^3+b^3)+(a^2+b^2)}{ab+a+b+1}$

$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 18, a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 76$

所求 = $\frac{76+18}{-1+4+1} = \frac{94}{4} = \frac{47}{2}$

17. $a, b \in R$, 若不等式 $|ax+4| \leq b$ 的解為 $-2 \leq x \leq 6$, 則數對 $(a, b) =$ _____。

解析 $-2 \leq x \leq 6 \Rightarrow -2-2 \leq x-2 \leq 6-2 \Rightarrow -4 \leq x-2 \leq 4$
 $\Rightarrow |x-2| \leq 4 \Rightarrow |-2||x-2| \leq |-2| \cdot 4$
 $\Rightarrow |-2(x-2)| \leq 8 \Rightarrow |-2x+4| \leq 8$, 得 $a = -1, b = 8$
 $\therefore (a, b) = (-1, 8)$

18. 設 $\sqrt{41-12\sqrt{5}}$ 的整數部分為 a , 小數部分為 b , 求 $\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b-9} =$ _____。

解析 $\sqrt{41-12\sqrt{5}} = \sqrt{41-2\sqrt{180}} = \sqrt{36-\sqrt{5}} = 6-\sqrt{5}$
 $\therefore 2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow -3 < -\sqrt{5} < -2 \Rightarrow 3 < 6-\sqrt{5} < 4$
故 $6-\sqrt{5} = 3 + (3-\sqrt{5})$, 得 $a = 3, b = 3-\sqrt{5}$
 $\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b-9} = \frac{1}{3-\sqrt{5}} - \frac{1}{6-\sqrt{5}-9} = \frac{1}{3-\sqrt{5}} - \frac{1}{-3-\sqrt{5}} = \frac{1}{3-\sqrt{5}} + \frac{1}{3+\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} + \frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{3}{2}$

19. 不等式 $|x-2| - 3|x+1| > 2x-9$ 的解為 _____。

解析 將數線分成 $x \geq 2, -1 \leq x < 2$, 和 $x < -1$ 三段討論
① $x \geq 2$ 時, 原式為 $(x-2) - 3(x+1) > 2x-9 \Rightarrow x < 1$, 不合
② $-1 < x < 2$ 時, 原式為 $(2-x) - 3(x+1) > 2x-9 \Rightarrow -6x > -8 \Rightarrow x < \frac{4}{3}$
在 $-1 \leq x < 2$ 的限制下, 其解為 $-1 \leq x < \frac{4}{3}$
③ $x < -1$ 時, 原式為 $(2-x) - 3(x+1) > 2x-9 \Rightarrow 2x+5 > 2x-9 \Rightarrow 0x > -14 \Rightarrow x$ 為任意數
在 $x < -1$ 的限制下, 其解為 $x < -1$
綜合①②③ 得出不等式的解為 $x < \frac{4}{3}$

20. 已知 k 為正整數且滿足 $\frac{k}{13} < \sqrt{7} < \frac{k+1}{13}$, 試問 k 值為 _____。

解析 $\frac{k}{13} < \sqrt{7} < \frac{k+1}{13} \Rightarrow k < 13\sqrt{7} < k+1 \Rightarrow k < \sqrt{1183} < k+1$
 $32^2 = 1024, 33^2 = 1089, 34^2 = 1156, 35^2 = 1225$
 $\Rightarrow 1156 < 1183 < 1225$

$$\Rightarrow 34 < \sqrt{1183} < 35 \Rightarrow 34 < 13\sqrt{7} < 35, k = 34$$