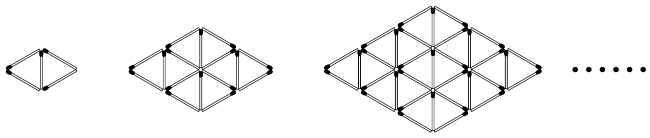
第壹部分：選擇題（占 60 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1. 題至第 6. 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是最適當的選項，畫記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分；未作答、答錯或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. $\sqrt{11-\sqrt{72}}$ 最接近以下哪個數？
   (1) $\dfrac{3}{2}$ (2) 2 (3) $\dfrac{5}{2}$ (4) 3 (5) $\dfrac{7}{2}$
   答案：(1)
   解析：$\sqrt{11-\sqrt{72}}=\sqrt{11-2\sqrt{18}}=3-\sqrt{2}=1.58\cdots\cdots$，故最接近 $\dfrac{3}{2}$
   故選(1)。

2. 用等長的火柴棒當作單位長拼成如下一系列的圖，試問若要單獨拼出圖（8）的圖形，需要幾根火柴棒？

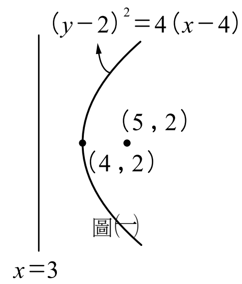


圖(1)　圖(2)　圖(3)

   (1) 144 (2) 192 (3) 208 (4) 232 (5) 256
   答案：(3)
   解析：左半部算朝左的三角形，右半部算朝右的三角形，再扣去重複到的鉛直對稱軸
   因此圖(3)的圖形有 $3\times(1+2+3)+3\times(1+2+3)-3=33$ 根火柴棒
   則圖(8)有 $3\times(1+2+3+4+5+6+7+8)+3\times(1+2+3+4+5+6+7+8)-8=208$（根）
   故選(3)。

3. 下列哪一個值與其他四個不同？
   (1) $\sin 112^\circ$ (2) $\cos(-338^\circ)$ (3) $(\cos 11^\circ-\sin 11^\circ)(\sin 11^\circ+\cos 11^\circ)$ (4) $\dfrac{\sqrt{1+\cos 44^\circ}}{2}$ (5) $\cos 33^\circ\cos 11^\circ+\sin 33^\circ\sin 11^\circ$
   答案：(4)
   解析：(1) 由廣義角的化簡，$\sin 112^\circ=\sin 68^\circ$
   (2) 由負角公式，$\cos(-338^\circ)=\cos 338^\circ=\sin 68^\circ$
   (3) 由平方差與二倍角公式，
   $(\cos 11^\circ-\sin 11^\circ)(\sin 11^\circ+\cos 11^\circ)=\cos^2 11^\circ-\sin^2 11^\circ=\cos 22^\circ=\sin 68^\circ$
   (4) 由半角公式，$\cos 22^\circ=\sqrt{\dfrac{1+\cos 44^\circ}{2}}$ 與題目中的 $\dfrac{\sqrt{1+\cos 44^\circ}}{2}$ 不相等
   (5) 由差角公式，$\cos 33^\circ\cos 11^\circ+\sin 33^\circ\sin 11^\circ=\cos(33^\circ-11^\circ)=\cos 22^\circ=\sin 68^\circ$
   故選(4)。

4. 下列關於二次曲線的敘述，有幾個是正確的？
   ① 拋物線 $(y-2)^2=4(x-4)$ 的準線是 $x=3$
   ② 雙曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{1}=1$ 的右半分支恰好是一個拋物線
   ③ 兩雙曲線 $x^2-y^2=1$ 與 $y^2-x^2=1$ 的四個焦點恰在同一個圓上
   ④ 兩橢圓 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 和 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的四個交點所圍成的正方形面積小於 16
   (1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 0 個
   答案：(3)
   解析：① $(y-2)^2=4(x-4)$ 為開口向右，頂點在（4 , 2）的標準拋物線
   如圖㈠，可知準線在 $x=3$，故①正確



圖㈠

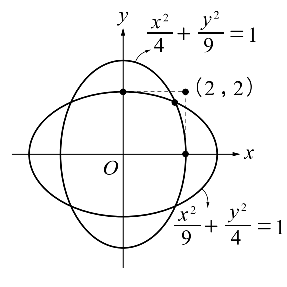
   ② 雙曲線的右半分支並非拋物線，故②錯誤
   ③ $x^2-y^2=1$ 為貫軸長與共軛軸長皆為 1，左右開的等軸雙曲線

$y^2-x^2=1$ 為貫軸長與共軛軸長皆為 1，上下開的等軸雙曲線

由對稱性可知四個焦點必共圓，故③正確

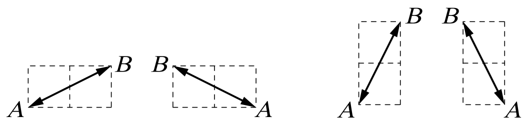
④ 由圖㈡可知 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 和 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 在第一象限交點的 x，y 坐標都小於 2，由對稱性知道四個交點所圍的面積小於 16，故④正確

∴有 3 個是正確的，故選⑶。



圖㈡

5. 象棋的馬走日字，亦即可以從 1x2（或 2x1）矩形的一個頂點跳到對角線的另一個頂點，如下圖，A 可跳至 B，反之亦然。今有一棋盤（棋盤上由單位 1 之方格組成），將其坐標化後有一個馬停在（3 , 5），設馬跳一步後的落點為（x , y）。試問下列何者正確？



⑴ 共有四個落點滿足 $x<3$ 且 $y>5$
⑵ 若 $x>3$，則 y 有兩個不同的可能值
⑶ $x-y$ 有八個不同的可能值
⑷ $x+2y$ 有七個不同的可能值
⑸ $3x-y$ 有四個不同的可能值

答案：⑷

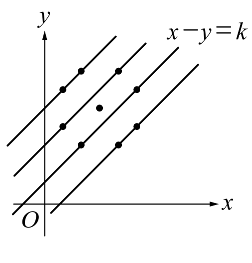
解析：⑴ ╳：$x<3$，$y>5$ 表往左上方跳，故共有兩個落點（1 , 6），（2 , 7）

⑵ ╳：$x>3$ 表示往右跳，故 y 有四個可能的值

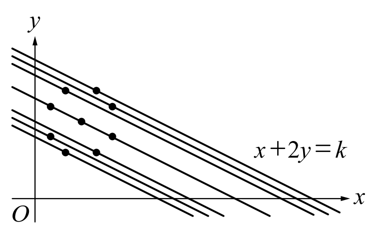
⑶ ╳：線性規劃的作法：要求 $x-y=k$（即 $y=x-k$）的可能 k 值，找出斜率為 1 的直線有幾條會碰到這八個點，由圖㈠知有四條，故有四個不同的可能值

⑷ ○：要求 $x+2y=k$ 的可能 k 值，找出斜率為 $-\frac{1}{2}$ 的直線有幾條會碰到這八個點，如圖㈡知有七條，故有七個不同的可能值

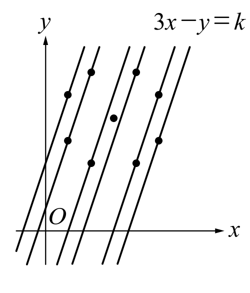
⑸ ╳：要求 $3x-y=k$ 的可能 k 值，找出斜率為 3 的直線有幾條會碰到這八個點，如圖㈢知有六條，故有六個不同的可能值



圖㈠



圖㈡



圖㈢

故選⑷。

6. 投擲一顆公正的骰子三次，所得點數分別為 a，b，c，則二階矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 2 \end{bmatrix}$ 有反矩陣的機率是多少？

⑴ $\frac{19}{24}$ ⑵ $\frac{5}{6}$ ⑶ $\frac{31}{36}$ ⑷ $\frac{67}{72}$ ⑸ $\frac{199}{216}$

答案：⑸

解析：$\begin{bmatrix} a & b \\ c & 2 \end{bmatrix}$ 有反矩陣表示 $2a-bc\neq 0$

先列出 $2a-bc=0$ 的情形，就 a 值來討論：

① $a=1$，$bc=2$，故（b , c）=（1 , 2），（2 , 1），共有 2 種

② $a=2$，$bc=4$，故（b , c）=（1 , 4），（2 , 2），（4 , 1），共有 3 種

③ $a=3$，$bc=6$，故（b , c）=（1 , 6），（2 , 3），（3 , 2），（6 , 1），共有 4 種

④ $a=4$，$bc=8$，故（b , c）=（2 , 4），（4 , 2），共有 2 種

⑤ $a=5$，$bc=10$，故（b , c）=（2 , 5），（5 , 2），共有 2 種

⑥ $a=6$，$bc=12$，故（b , c）=（2 , 6），（3 , 4），（4 , 3），（6 , 2），共有 4 種

因此 $2a-bc\neq 0$ 的（a, b, c）共有 $6^3-(2+3+4+2+2+4)=199$（種）

所求機率為 $\frac{199}{6^3}=\frac{199}{216}$

故選(5)。

二、多選題（占 30 分）

說明：第7.題至第12.題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的，選出正確選項畫記在答案卡之「解答欄」。每題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

7. 用矩陣的列運算解三元一次線性方程組，中間某個步驟為 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a & b \end{array}\right]$，其中 a，b 為實數，試問下列哪些選項正確？

(1) 若 $a=0$，則此方程組無解
(2) 若 $a\neq 0$，則此方程組有唯一解
(3) 若 $a=b$，則此方程組有唯一解
(4) 若 $a^2+b^2=0$，則此方程組有無限多組解
(5) 若 $\frac{a}{b}=0$，則此方程組無解

答案：(2)(4)(5)

解析：(1)╳：$a=0$ 仍然可能有解（例如 $b=0$，則有無限多組解）
(2)○：$a\neq 0$ 則由矩陣的列運算知道有唯一解
(3)╳：$a=b$ 可能有唯一解或無限多組解（$a=b\neq 0$ 時有唯一解，但 $a=b=0$ 時有無限多組解）
(4)○：$a^2+b^2=0$ 表示 $a=b=0$，此時有無限多組解
(5)○：$\frac{a}{b}=0$ 表示 $a=0$，$b\neq 0$，此時第三列表示為 $0z=b$，無解

故選(2)(4)(5)。

8. 下列敘述哪些正確？

(1) $\log_4(\log_3(\log_2 512))=\frac{1}{2}$
(2) 若 $a>b>0$，則 $\log_7(a-b)=\frac{\log_7 a}{\log_7 b}$
(3) $3^{\log_9 25}=\frac{1}{25}$
(4) 2^{80} 會超過一莫耳（一莫耳是 6×10^{23}）
(5) $a<b<c$ 為三個正數，且成等差數列，則 $\log a+\log c<2\log b$

答案：(1)(4)(5)

解析：(1)○：由對數定義得 $\log_4(\log_3(\log_2 512))=\log_4(\log_3 9)=\log_4 2=\frac{1}{2}$
(2)╳：$\frac{\log_7 a}{\log_7 b}=\log_b a\neq\log_7(a-b)$
(3)╳：指數的化簡，$3^{\log_9 25}=3^{\log_9 5^2}=3^{2\log_9 5}=9^{\log_9 5}=5$
(4)○：$\log 2^{80}=80\log 2\approx 80\times 0.3010=24.08$，故 2^{80} 為 25 位數，顯然超過一莫耳（24 位數）
(5)○：因為對數函數 $y=\log x$ 向下凹，因此可知 $\log\frac{a+c}{2}>\frac{\log a+\log c}{2}$，得 $2\log\frac{a+c}{2}>\log a+\log c$，
即 $2\log b>\log a+\log c$

故選(1)(4)(5)。

9. 下列關於圖形的敘述哪些正確？

⑴ $y=x^3$ 和 $y=x^4$ 的圖形交於兩點

⑵ 若一次函數 $f(x)$ 的圖形通過一、三、四象限，則 $f(-2)<0$

⑶ $y=-1000$ 與 $y=\log_{\frac{1}{1000}} x$ 的圖形不相交

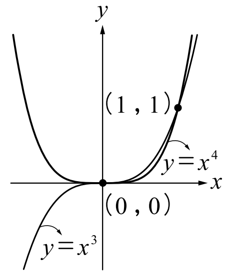
⑷ 拋物線 $y=x^2+102x+2013$ 的焦點到準線距離比 $y=x^2+103x+2014$ 的焦點到準線距離大

⑸ 雙曲線 $x^2-y^2=1$ 和 $(x-1)^2-(y-1)^2=1$ 的圖形交於兩點

答案：⑴⑵

解析：⑴ ○：由圖㈠可知，兩函數圖形顯然只交於 $(0,0)$，$(1,1)$ 這兩點

（在第一象限不會再相交的原因為 $y=x^4$ 成長較快）

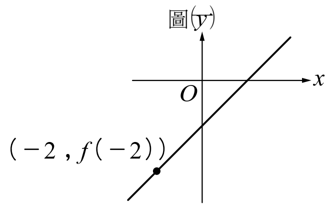


圖㈠

⑵ ○：一次函數圖形為直線。由圖㈡可知，通過一、三、四象限必有 $f(-2)<0$

⑶ ╳：交點為 $\left(\left(\dfrac{1}{1000}\right)^{-1000},\ -1000\right)$

⑷ ╳：所有 $y=x^2+bx+c$ 的圖形標準化後焦距都是相同的，因此焦點到準線距離也是相同的，說明如下：

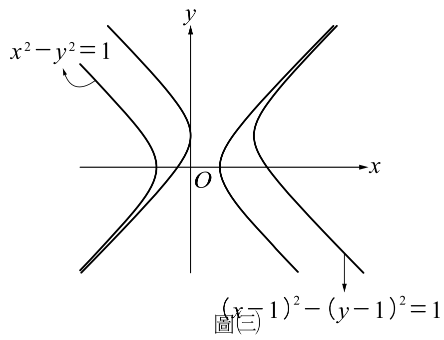


圖㈡

$y=x^2+bx+c=\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{4c-b^2}{4}$，移項得 $\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2=4\times\dfrac{1}{4}\times\left(y-\dfrac{4c-b^2}{4}\right)$，故焦距恆等於 $\dfrac{1}{4}$

⑸ ╳：$(x-1)^2-(y-1)^2=1$ 的圖形為 $x^2-y^2=1$ 的圖形向右上平移 $(1,1)$

由圖㈢，可知兩雙曲線不相交



圖㈢

〈另解〉

$$\begin{cases}x^2-y^2=1\\(x-1)^2-(y-1)^2=1\end{cases}$$

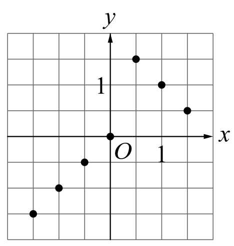
$$\Rightarrow\begin{cases}(x+y)(x-y)=1\\\left[(x-1)+(y-1)\right]\left[(x-1)-(y-1)\right]=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(x+y)(x-y)=1\\(x+y-2)(x-y)=1\end{cases}\Rightarrow x+y=x+y-2\text{（矛盾）}$$

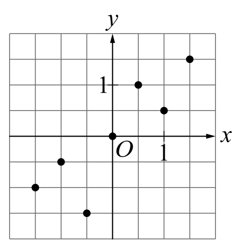
$\therefore x^2-y^2=1$ 與 $(x-1)^2-(y-1)^2=1$ 無交點

故選⑴⑵。

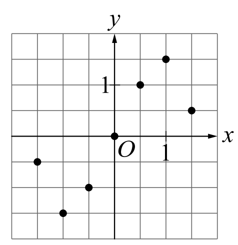
10. 下面有三個散佈圖，各有七個資料。令 $\sigma_X^{(1)}$ 表圖㈠ x 資料的標準差，$\mu_X^{(1)}$ 表圖㈠ x 資料的算術平均數；令 $\sigma_Y^{(1)}$ 表圖㈠ y 資料的標準差，$\mu_Y^{(1)}$ 表圖㈠ y 資料的算術平均數；r_1 表圖㈠中 x 與 y 的相關係數。同理可對圖㈡及圖㈢的算術平均數、標準差及相關係數作類似的定義。試問下列哪些選項正確？



圖㈠



圖㈡



圖㈢

⑴ $\mu_X^{(1)}=0$

⑵ $\sigma_X^{(1)}=1$

⑶ $\mu_Y^{(1)}=\mu_Y^{(2)}=\mu_Y^{(3)}$

⑷ $\sigma_Y^{(1)}>\sigma_Y^{(2)}>\sigma_Y^{(3)}$

⑸ $r_2>r_1>r_3$

答案：⑴⑵⑶

解析：⑴ ○：題圖㈠的七個點的 x 坐標分別為 $\dfrac{-3}{2}$，-1，$\dfrac{-1}{2}$，0，$\dfrac{1}{2}$，1，$\dfrac{3}{2}$，故 $\mu_X^{(1)}=0$

(2) ◯：標準差 $\sigma_X^{(1)}$ 經計算為 $\sqrt{\frac{1}{7}\left(\frac{9}{4}+1+\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}+1+\frac{9}{4}\right)}=1$

(3) ◯：題圖㈡、㈢的點為題圖㈠的點移動而成，兩軸方向各自離原點的量仍然不變

故 $\mu_Y^{(1)}=\mu_Y^{(2)}=\mu_Y^{(3)}=0$

(4) ╳：同(3)，故 $\sigma_Y^{(1)}=\sigma_Y^{(2)}=\sigma_Y^{(3)}=1$

(5) ╳：計算三個圖的 $\sum(x_i-0)(y_i-0)$，分別得 6，6，$\frac{11}{2}$，故 $r_1=r_2>r_3$

故選(1)(2)(3)。

11. 空間中有三條直線：

L_1：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$，$L_2$：$\begin{cases}x=1\\y=1\\z=t\end{cases}$，$t$ 為任意實數，L_3：$\begin{cases}x+y=1\\z=1\end{cases}$。

試問下列哪些選項正確？

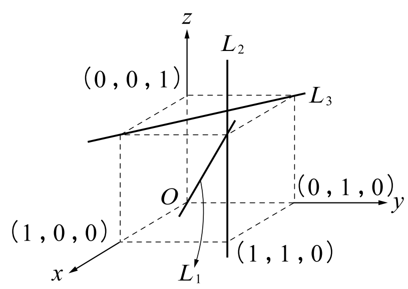
(1) L_1 和 L_2 垂直　(2) L_2 和 L_3 歪斜　(3) L_1 和 L_3 交於一點

(4) L_1 和 L_2 的公垂向量為 $(1,-1,0)$

(5) 已知 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 這三個平面將空間分成八個區域，每個區域稱為一個卦限，則 L_1，L_2，L_3 一共通過八個卦限中的四個卦限

答案：(2)(4)

解析：觀察三線都通過單位正立方體上的某些頂點。利用此略為畫圖，如右圖



(1) ╳：$(1,1,1)\cdot(0,0,1)=1\neq 0$，故 L_1，L_2 不垂直

(2) ◯：由圖形得知 L_2，L_3 兩線歪斜

(3) ╳：由圖形得知 L_1，L_3 兩線歪斜

(4) ◯：L_1 和 L_2 之公垂向量 $=(1,1,1)\times(0,0,1)=(1,-1,0)$

(5) ╳：觀察圖可知，除了第一卦限外，L_1 通過一個卦限，L_2 通過一個卦限，L_3 通過兩個卦限（且這些卦限皆不同）

因此三條線共通過五個卦限

故選(2)(4)。

12. 圓內接四邊形 $ABCD$ 中，已知 $2\overline{AB}=\overline{BC}$，且 $\overline{CD}=2$，$\overline{DA}=1$，$\cos\angle ABC=\frac{5}{8}$。試問下列哪些選項正確？

(1) $\cos\angle ADC=\frac{5}{8}$　(2) $\overline{AC}=\frac{\sqrt{30}}{2}$　(3) $\sin\angle ADC=\frac{\sqrt{39}}{8}$

(4) $\overline{AB}=\sqrt{3}$　(5) 四邊形 $ABCD$ 之外接圓半徑大於 2

答案：(2)(3)(4)

解析：(1) ╳：圓內接四邊形對角互補

因此 $\cos\angle ADC=\cos(180^\circ-\angle ABC)=-\cos\angle ABC=-\frac{5}{8}$

(2) ◯：在$\triangle ADC$ 中利用餘弦定理，$\overline{AC}^2=2^2+1^2-2\times2\times1\times\cos\angle ADC\Rightarrow\overline{AC}=\frac{\sqrt{30}}{2}$

(3) ◯：利用 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 計算可得 $\sin\angle ADC=\frac{\sqrt{39}}{8}$

(4) ◯：在$\triangle ABC$ 中利用餘弦定理，$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=2a$

則有 $\overline{AC}^2=\frac{15}{2}=a^2+(2a)^2-2\times a\times 2a\times\frac{5}{8}$，解得 $a=\sqrt{3}$

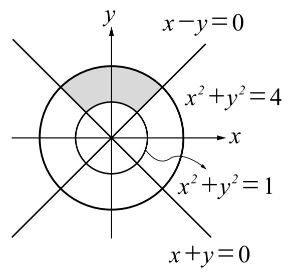
(5) ╳：在$\triangle ACD$ 中用正弦定理 $\frac{\overline{AC}}{\sin\angle ADC}=2R$，可求得 $R=2\sqrt{\frac{30}{39}}<2$

故選(2)(3)(4)。

第貳部分：選填題（占 40 分）

> 說明：1. 第 A. 至 H. 題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號（13－40）。
> 2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 在坐標平面上，$x+y\geq 0$，$x-y\leq 0$，$x^2+y^2\leq 4$，$x^2+y^2\geq 1$ 四個不等式所代表的圖形所圍成的區域面積為 $\frac{⑬}{⑭}\pi$。（化為最簡分數）

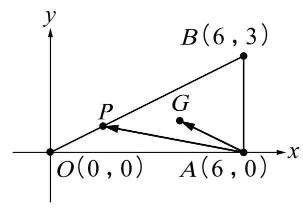


答案：$\frac{3}{4}\pi$

解析：依題意所求為右圖的陰影部分面積，即圓環的 $\frac{1}{4}$

因此所求面積為 $\frac{1}{4}(4\pi-\pi)=\frac{3}{4}\pi$。

B. 令 G 為 $\triangle OAB$ 的重心，已知 $O(0,0)$，$A(6,0)$，$B(6,3)$，且 P 在 $\overline{OB}$ 邊上。若 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的最小值為 m，最大值為 M，則 $m+M=$ ⑮⑯。



答案：15

解析：因為直線 OB 的方程式為 $y=\frac{1}{2}x$，故由參數式可設 $P(2t,t)$，$0\leq t\leq 3$

又重心 G 坐標為 $\left(\frac{0+6+6}{3},\frac{0+0+3}{3}\right)=(4,1)$

故 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AP}=(-2,1)\cdot(2t-6,t)=-3t+12$

$\because 0\leq t\leq 3$　$\therefore$ 最大值 $M=12$，最小值 $m=3$，故 $m+M=15$。

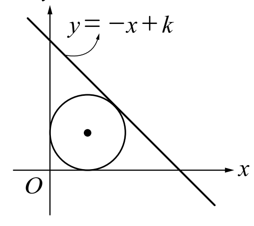
C. 和其他先天疾病相較，新生兒天生聽力受損發生的機率非常高，但只要發現得早多半能夠有良好的治療。因此政府多年來大力推動新生兒聽力篩檢，以期能早期發現早期治療。已知某地區新生兒的男女比例為男：女＝110：100。而根據歷年統計資料顯示，該地區新生兒男嬰、女嬰天生聽力受損的機率約分別為 $\frac{1}{320}$、$\frac{1}{300}$。今若某位新生兒聽力篩檢出有受損，則其為男嬰的機率為 $\frac{⑰⑱}{⑲⑳}$。（化為最簡分數）

答案：$\frac{33}{65}$

解析：是新生男嬰且聽力受損機率為 $\frac{11}{21}\times\frac{1}{320}$，是新生女嬰且聽力受損機率為 $\frac{10}{21}\times\frac{1}{300}$

故若新生兒聽力篩檢出有受損，且其為男嬰的機率為 $\dfrac{\frac{11}{21}\times\frac{1}{320}}{\frac{11}{21}\times\frac{1}{320}+\frac{10}{21}\times\frac{1}{300}}=\frac{33}{65}$。

D. 已知一圓 O 的圓心為 $(1,1)$，半徑為 1。若通過點 $P(a,0)$ 與點 $Q(0,a)$ 的線段與圓 O 相交，則 a 的最大可能範圍為 $㉑-\sqrt{㉒}\leq a\leq ㉓+\sqrt{㉔}$。



答案：$2-\sqrt{2}\leq a\leq 2+\sqrt{2}$

解析：$\overleftrightarrow{PQ}$ 斜率為 -1

假設 $\overleftrightarrow{PQ}$ 直線方程式為 $y=-x+k$

代入 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 得 $(x-1)^2+(-x+k-1)^2=1$

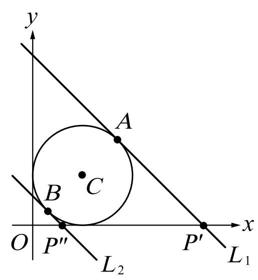
得 $2x^2-2kx+(1+k^2-2k)=0$

但因為是切線，為二重根，故判別式為 0，即 $(-2k)^2-4\times2\times(1+k^2-2k)=0$

解得 $k=2\pm\sqrt{2}$，即相切時 $k=2\pm\sqrt{2}$

故在 $2-\sqrt{2}\leq a\leq 2+\sqrt{2}$ 時直線與圓相交。

〈另解〉



直線 L_1，L_2 的斜率為 -1，如右圖

設 A、B 分別為直線 L_1、L_2 與圓 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的切點，圓的圓心為 C

則相切時 $\overline{OA}=\overline{OC}+\overline{CA}=\sqrt{2}+1$，

故 $\overline{OP'}=\sqrt{2}\times\overline{OA}=2+\sqrt{2}$，同理 $\overline{OP''}=\sqrt{2}(\overline{OA}-2)=2-\sqrt{2}$。

E. 已知實數 a，b，c 滿足 $abc\neq 0$，$a+b+\dfrac{1}{c}=0$，$-1<ac<1$。若矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & a\\ b & \frac{1}{c}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{a}\\ \frac{1}{b} & c\end{bmatrix}$ 滿足 $A+B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ * & 4\end{bmatrix}$，其中 $*$ 是某個實數。由以上資料可求出

$*=$ $\dfrac{㉕㉖㉗-㉘\sqrt{㉙}}{㉚}$ 。（化為最簡根式）

答案：$\dfrac{-21-5\sqrt{3}}{6}$

解析：由題意，

$a+\dfrac{1}{a}=2$，解得 $a=1$

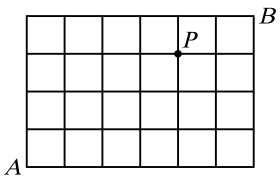
$c+\dfrac{1}{c}=4$，解得 $c=2\pm\sqrt{3}$

又 $-1<ac<1$，故 $c=2-\sqrt{3}$

$\because a+b+\dfrac{1}{c}=0$，故解得 $b=-3-\sqrt{3}$

因此 $*=b+\dfrac{1}{b}=\dfrac{-21-5\sqrt{3}}{6}$。

F. 如右圖的棋盤路徑，要由 A 點走捷徑到 B 點。<u>若有通過 P 點，則在 P 點必須轉彎</u>。則共有 ㉛㉜㉝ 種走法。

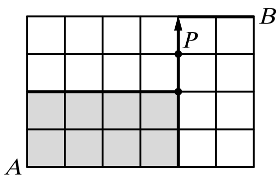


答案：155

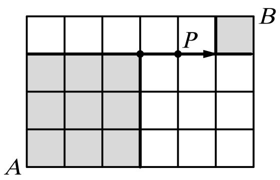
解析：“（隨便走）－（過 P 點不轉彎）” 即可，即過 P 不轉彎必為直走或橫走

如圖㈠，直走的方法有 $\dfrac{6!}{4!2!}\times 1=15$ 種

如圖㈡，橫走的方法有 $\dfrac{6!}{3!3!}\times\dfrac{2!}{1!1!}=40$ 種



圖㈠



圖㈡

故所求為 $\dfrac{10!}{6!4!}-15-40=155$（種）。

G. 若 $f(x)$，$g(x)$ 是二次多項式函數，已知 $f(x)$ 在 $x=k$ 時有最大值，且 $f(k)=13$，$f(-k)=-23$，$g(k)=49$，$g(-k)=7$。又 $f(x)+g(x)=2x^2+13x+5$。

則 $f(x)-g(x)=$ ㉞㉟x^2-㊱$x+$㊲ 。

答案：$-4x^2-1x+3$

解析：因為 $f(x)$ 在 $x=k$ 時有最大值 13，可設 $f(x)=-a(x-k)^2+13$

由 $f(-k)=-23$ 得 $ak^2=9$，又 $f(x)+g(x)=2x^2+13x+5$

令 $x=k$，由 $f(k)=13$，$g(k)=49$ 可得 $2k^2+13k+5=62$

由 $f(-k)=-23$，$g(-k)=7$ 可得 $2k^2-13k+5=-16$

兩式解得 $k=3$，因此 $a=1$

故得 $f(x)=-(x-3)^2+13=-x^2+6x+4$

$\therefore g(x)=3x^2+7x+1$

故 $f(x)-g(x)=-4x^2-1x+3$。

H. 正四面體 $O-ABC$，邊長為 1，P 點為 $\overline{AB}$ 中點，Q 點在 $\overline{OB}$ 上且 $\overline{OQ}:\overline{QB}=2:1$，$R$ 點在 $\overline{OC}$ 上且 $\overline{OR}:\overline{RC}=1:3$，則 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=$ $\dfrac{㊳}{㊴㊵}$ 。（化為最簡分數）

答案：$\dfrac{5}{24}$

解析：全部化成 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ})\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OR})$

$=\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BO}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AO}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OC}\right)$

$$=\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}\right)$$

$$=-\frac{1}{12}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}-\frac{1}{12}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}$$

$$+\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{24}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\frac{1}{8}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$$

利用 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=1\times1\times\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

以及 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}=1$

得 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=\frac{5}{24}$。

可能用到的參考公式及數值

1. 首項為 a 且公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S_n=\dfrac{n\,(2a+(n-1)\,d)}{2}$

   首項為 a 且公比為 r 的等比數列前 n 項之和為 $S_n=\dfrac{a\,(1-r^n)}{1-r}$，$r\neq 1$

2. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

3. 三角函數的二倍角公式：$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

   $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$

   $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

4. 三角函數的半角公式：$\sin\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$

   $\cos\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$

   $\tan\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

5. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 為$\triangle ABC$ 外接圓半徑）

   $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

6. 一維數據 X：x_1，x_2，……，x_n，算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}\right)-n\mu_X^{\,2}\right)}$

7. 二維數據 (X,Y)：(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，……，(x_n,y_n)

   相關係數 $r_{(X,Y)}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   迴歸直線（最適合直線）方程式為 $y-\mu_Y=r_{(X,Y)}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

8. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\pi\approx 3.142$
9. 對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010$，$\log_{10}3\approx 0.4771$，$\log_{10}5\approx 0.6990$，$\log_{10}7\approx 0.8451$