高雄市明誠中學 高一數學平時測驗				日期：105.06.22
範圍	4-2 二維數據分析	班級	一年____班	姓名
		座號		

一、填充題(每題 10 分)

1. 已知 $\sum_{i=1}^{100}(x_i-\mu_X)^2=36, \sum_{i=1}^{100}(y_i-\mu_Y)^2=49, \sum_{i=1}^{100}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)=28$，則 X 與 Y 的相關係數 $r=$ __ .

答案：$\frac{2}{3}$

解析：相關係數 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{100}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{100}(x_i-\mu_X)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{100}(y_i-\mu_Y)^2}}=\dfrac{28}{\sqrt{36}\sqrt{49}}=\dfrac{2}{3}$

2. 五位同學參加一項包含數學與英文的能力競賽，每科滿分為 10 分，成績如下表：

數學	9	7	8	6	5
英文	6	7	10	8	9

則 x 與 y 的相關係數為________， y 對 x 的迴歸直線方程式為______________.

答案：-0.4 ； $2x+5y=54$

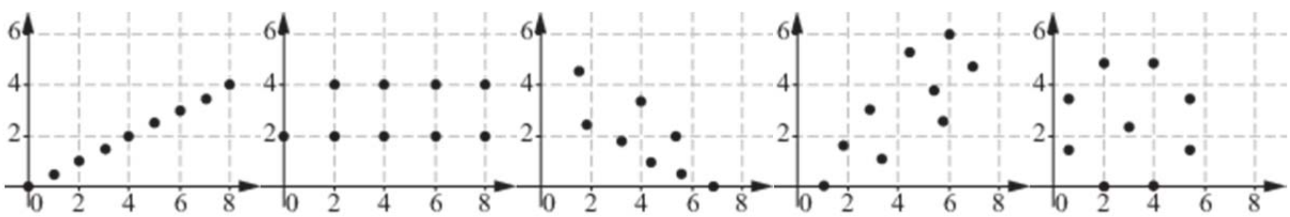
解析：$\mu_x=\frac{1}{5}(9+7+8+6+5)=7,\ \mu_y=\frac{1}{5}(6+7+10+8+9)=8$

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu_x)^2=4+1+1+4=10,\ \sum_{i=1}^{5}(y_i-\mu_y)^2=4+1+4+1=10$$

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)=2\times(-2)+1\times2+(-2)\times1=-4 \quad \Rightarrow r=\frac{-4}{\sqrt{10}\sqrt{10}}=-0.4$$

$$y-\mu_y=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)\Rightarrow L:y-8=-\frac{4}{10}\times\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}(x-7)\Rightarrow y=\frac{54}{5}-\frac{2}{5}x$$

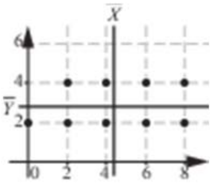
3. 下圖為變數 X 與 Y 的散布圖，如下圖一至五所示，每個圖都有 9 個點， X 與 Y 的相關係數依序為 r_1,r_2,r_3,r_4,r_5 ，試比較 r_1,r_2,r_3,r_4,r_5 的大小順序為__________.



圖一 圖二 圖三 圖四 圖五

答案：$r_1>r_4>r_2>r_5>r_3$

解析：圖一為完全正相關，$\therefore r_1=1$

圖二 ，$\therefore r_2 > 0$

圖三為負相關，$\therefore r_3 < 0$

圖四為正相關，$\therefore r_4 > 0$

圖五為對稱圖形，$\therefore r_5 = 0$

故 $r_1 > r_4 > r_2 > r_5 > r_3$

4. 設 3 筆資料(1, 3), (2, a), (3, b)的迴歸直線方程式是 $y = 4 - x$，則數對 $(a,b) =$__________.

答案：(2, 1)

解析：$\because \mu_x = \dfrac{1+2+3}{3} = 2$，又 (μ_x, μ_y) 代入 $y = 4 - x \Rightarrow \mu_y = 4 - \mu_x = 4 - 2 = 2 = \dfrac{3+a+b}{3}$

$\therefore a + b = 3$，又 $y - \mu_y = r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x) \Rightarrow y - 2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{3}(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sum_{i=1}^{3}(x_i - \mu_x)^2} \cdot (x - 2)$

即迴歸直線的斜率為 $\dfrac{\sum_{i=1}^{3}(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sum_{i=1}^{3}(x_i - \mu_x)^2} = -1$

$\Rightarrow \dfrac{(1-2)(3-2) + 0 + 1\cdot(b-2)}{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \dfrac{b-3}{2} = -1 \Rightarrow b - 3 = -2 \Rightarrow b = 1, a = 2$　　故 $(a,b) = (2,1)$

5. 若散佈圖上任一點 (X,Y) 均滿足 $Y = 2X + 10$，則 X 與 Y 的相關係數為__________.

答案：1

解析：所有點均在一條正斜率的直線上 $\Rightarrow r = 1$

6. 已知兩組變量 X 與 Y 共 10 筆資料，若平均數 $\mu_x = 4, \mu_y = 3$，且 Y 對 X 的迴歸直線過點 $(0,1)$，則迴歸直線方程式為__________.

答案：$y = 1 + \dfrac{1}{2}x$

解析：$L: y - \mu_y = r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x)$，

過 $(0,1)$ 代入 $\Rightarrow 1 - 3 = r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(0 - 4) \Rightarrow r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y - 3 = \dfrac{1}{2}(x - 4) \Rightarrow y = 1 + \dfrac{1}{2}x$

7. 分析一組 10 個二維數據得到 $\mu_X = 5, \mu_Y = 7, \sigma_X = 3, \sigma_Y = 5, \sum_{i=1}^{10}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y) = 45$，則 Y 對 X 的迴歸直線為__________ .

答案：$y = 0.5x + 4.5$

解析：$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_Y)^2}}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{n\sigma_x\sigma_y}=\dfrac{45}{10\times3\times5}=0.3$

Y 對 X 的迴歸直線為 $y-\mu_y=r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)\Rightarrow y=7+0.3\times\dfrac{5}{3}(x-5)=0.5x+4.5$

8. 有 10 筆資料統計如下 $\sum\limits_{i=1}^{10}x_i=270,\ \sum\limits_{i=1}^{10}y_i=360,\ \sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2=7434,\ \sum\limits_{i=1}^{10}y_i^2=13185,\ \sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i=9864$，則 X 與 Y 的相關係數 $=$__________.

答案：0.8

解析：$\mu_x=27,\ \mu_y=36$

$$\Rightarrow r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i-n\mu_x\mu_y}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2-n\mu_x^2}\times\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{10}y_i^2-n\mu_y^2}}=\frac{9864-10\times27\times36}{\sqrt{7434-10\times27^2}\times\sqrt{13185-10\times36^2}}=0.8$$

9. 某校高一 n 位同學，測得平均身高 $\mu_x=172$ cm，標準差 $\sigma_x=7.6$ cm，平均體重 $\mu_y=72$ kg，標準差 $\sigma_y=15.2$ kg，身高與體重的相關係數為 $r=0.5$，則體重對身高的迴歸直線方程式為______.

答案：$y=-100+x$

解析：$y-\mu_y=r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)\Rightarrow y-72=0.5\times\dfrac{15.2}{7.6}(x-172)\Rightarrow y-72=x-172\Rightarrow y=-100+x$

10. 已知兩變數 X,Y 的數據如右：

若 Y 對 X 的迴歸直線為 $Y=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}X$，則 k 值為__________.

X	1	2	4	5
Y	2	k	2	5

答案：3

解析：迴歸直線 $Y=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}X$ 必過 (μ_X,μ_Y)

故 $\mu_X=\dfrac{1+2+4+5}{4}=3,\ \mu_Y=\dfrac{2+k+2+5}{4}=\dfrac{k+9}{4}\qquad \dfrac{k+9}{4}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot3\Rightarrow k=3$

11. 設兩組資料 x,y. 若 y 對 x 的最適合直線為 $y=\dfrac{2}{5}x+28$ 且 x 的平均數為 50. 令 $s=\dfrac{1}{2}x-15$, $t=\dfrac{1}{4}y-3$，若 t 對 s 的最適合直線為 $t=as+b$，則數對 $(a,b)=$____________.

答案：$(\dfrac{1}{5},7)$

解析：將 $\mu_x=50$ 代入 $y=\dfrac{2}{5}x+28$，得 $\mu_y=48,\quad r_{xy}\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{2}{5}$

$\therefore\ \mu_s=\dfrac{1}{2}\times50-15=10,\ \mu_t=\dfrac{1}{4}\times48-3=9,\ r_{st}=r_{xy},\sigma_s=\dfrac{1}{2}\sigma_x,\sigma_t=\dfrac{1}{4}\sigma_y$

$\Rightarrow t$ 對 s 的最適合直線 $t-\mu_t=r_{st}\dfrac{\sigma_t}{\sigma_s}(s-\mu_s)\Rightarrow t-\mu_t=r_{xy}\dfrac{\frac{1}{4}\sigma_y}{\frac{1}{2}\sigma_x}(s-\mu_s)\Rightarrow t-\mu_t=\dfrac{1}{2}[r_{xy}\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}](s-\mu_s)$

$\Rightarrow t-9=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}(s-10)$，即 $t=\dfrac{1}{5}s+7$，$\therefore(a,b)=(\dfrac{1}{5},7)$

12. 設抽樣某班 8 位學生的數學成績 (x) 與英文成績 (y)，得到平均數、標準差與相關係數如下：

$\mu_x=65,\ \mu_y=70,\ \sigma_x=10,\ \sigma_y=5,\ r=0.8$

(1)請寫出英文成績 (y) 對數學成績 (x) 的迴歸線方程式：______________.

(2)若此班上某位同學的數學成績 60 分，請預測此生的英文成績為______________.

答案：(1) $y=44+\dfrac{2}{5}x$ (2)68 分

解析：(1)迴歸線方程式 $y-\mu_y=r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)\Rightarrow y-70=0.8\times\dfrac{5}{10}(x-65)$， $y=44+\dfrac{2}{5}x$

(2)數學 $x=60$ 代入：英文 $y=44+\dfrac{2}{5}\times60=68$（分）

13. 一組二維數據滿足下列的條件：

$\sum_{i=1}^{50}x_i=p,\sum_{i=1}^{50}y_i=250,\sum_{i=1}^{50}x_i^2=1200,\sum_{i=1}^{50}y_i^2=1500,\sum_{i=1}^{50}x_iy_i=900$，已知 y 對 x 的迴歸直線方程式為

$y=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{21}{5}$，若相關係數為 r，則數對 $(p,r)=$__________.

答案：$(100,\dfrac{4}{5})$

解析：$\because\sum_{i=1}^{50}x_i=p\Rightarrow\mu_x=\dfrac{p}{50};\quad\sum_{i=1}^{50}y_i=250\Rightarrow\mu_y=\dfrac{250}{50}=5$

將 $(\dfrac{p}{50},5)$ 代入 $y=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{21}{5}$ 得 $p=100$

$\because\sigma_x=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{50}x_i^2}{50}-\mu_x{}^2}=\sqrt{\dfrac{1200}{50}-2^2}=\sqrt{20}$

$\sigma_y=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{50}y_i^2}{50}-\mu_y{}^2}=\sqrt{\dfrac{1500}{50}-5^2}=\sqrt{5}$

又 $\dfrac{2}{5}=r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\Rightarrow\dfrac{2}{5}=r\times\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}\Rightarrow r=\dfrac{4}{5}$ $\quad\therefore(p,r)=(100,\dfrac{4}{5})$

14. 有 n 個觀測點 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 在散布圖上，若這 n 個點恰好在同一直線上，且其中兩點的坐標為(15, 30), (30, 40). 若變量 X 的算術平均數為 30，標準差為 6，則 Y 的算術平均數為__________，標準差為__________.

答案：40；4

解析：迴歸直線方程式即$\dfrac{y-30}{x-15}=\dfrac{40-30}{30-15}\Rightarrow y-30=\dfrac{2}{3}(x-15)\Rightarrow y=\dfrac{2}{3}x+20$

$\mu_y=\dfrac{2}{3}\mu_x+20=\dfrac{2}{3}\cdot 30+20=40$

$\sigma_y=\dfrac{2}{3}\sigma_x=\dfrac{2}{3}\times 6=4$

15. 某次段考，某班英文平均 60 分、標準差 4 分；數學平均 55 分、標準差 8 分，而這兩科成績之相關係數為 0.7. 後來調整分數，英文將原成績乘以 1.2 再減 3 分；數學將原成績乘以 0.6 再加 25 分，則調整分數後，兩科間之相關係數為____________.

答案：0.7

解析：$r_{1.2X-38,0.6Y+25}=r_{X,Y}=0.7$ (因為 1.2 與 0.6 同號)