高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：105.06.03					
範圍	3-3 條件機率(C)	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1.若 A，B 為兩事件，$P(A\cup B)=\dfrac{3}{4}$，$P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$，$P(B')=\dfrac{2}{3}$，則 $P(B'\mid A)=$____________ .

解答 $\dfrac{5}{8}$

解析 $\because\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\quad\therefore\ \dfrac{3}{4}=P(A)+(1-\dfrac{2}{3})-\dfrac{1}{4}\ \Rightarrow P(A)=\dfrac{2}{3}$

故 $P(B'\mid A)=\dfrac{P(A\cap B')}{P(A)}=\dfrac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{5}{8}$

2.從一副撲克牌中抽出 5 張，已知其中 4 張是紅心，求另外一張也是紅心的機率為____________ .

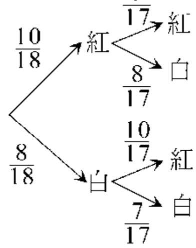
解答 $\dfrac{3}{16}$

解析 設 A 表前 4 張牌皆為紅心的事件，B 表第 5 張是紅心的事件.則所求機率為 $P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$\because$ 前 4 張皆為紅心的機率 $P(A)=\dfrac{C^{13}_4}{C^{52}_4}$ $\quad\therefore$ $P(A\cap B)$表抽到 5 張皆為紅心的機率

$\therefore\ P(A\cap B)=\dfrac{C^{13}_5}{C^{52}_5}\ \Rightarrow P(B\mid A)=\dfrac{\frac{C^{13}_5}{C^{52}_5}}{\frac{C^{13}_4}{C^{52}_4}}=\dfrac{9}{48}=\dfrac{3}{16}$

3.設袋中有 10 個紅球，8 個白球，今自袋中連取兩次，每次取一球，取後不放回，已知兩次中至少有一次取到紅球，求兩球皆為紅球的機率為____________ .



解答 $\dfrac{9}{25}$

解析 每次取球情況的機率分配樹狀圖如上

故至少有一次取到紅球的機率為 $\dfrac{10}{18}\times\dfrac{9}{17}+\dfrac{10}{18}\times\dfrac{8}{17}+\dfrac{8}{18}\times\dfrac{10}{17}=\dfrac{125}{153}$

$\because$ 兩次均取到紅球的機率為 $\dfrac{10}{18}\times\dfrac{9}{17}=\dfrac{5}{17}$ $\quad\therefore$ 所求的條件機率為 $\dfrac{\frac{5}{17}}{\frac{125}{153}}=\dfrac{9}{25}$

4.某班期中考，數學有 18%的學生不及格，英文有 15%不及格，英、數兩科都不及格者占 6%，今任選一學生，若已知他的數學不及格，求英文及格的機率為____________ .

解答 $\dfrac{2}{3}$

解析 設 M 表數學不及格的事件，E 表英文不及格的事件

則 $P(E' \mid M)=\dfrac{P(E'\cap M)}{P(M)}=\dfrac{P(M)-P(E\cap M)}{P(M)}$

$\because$ $P(M)=0.18$，$P(E)=0.15$，$P(E\cap M)=0.06$，$P(E'\cap M)=P(M)-P(E\cap M)=0.18-0.06=0.12$

$\therefore$ $P(E' \mid M)=\dfrac{0.12}{0.18}=\dfrac{12}{18}=\dfrac{2}{3}$

5.擲一公正骰子兩次，在點數和大於 9 點的條件下，第一次擲得 5 點的機率為____________ .

解答 $\dfrac{1}{3}$

解析 設 A 表示點數和大於 9 點的事件，B 表示第一次擲得 5 點的事件，則

$A=\{(4，6)，(5，5)，(6，4)，(5，6)，(6，5)，(6，6)\}$，$A\cap B=\{(5，5)，(5，6)\}$

$\therefore$ $P(B \mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

6.擲一枚硬幣四次,(1)恰出現三次正面的機率為____________,(2)至少出現三次正面的機率為____________.

解答 (1)$\dfrac{1}{4}$;(2)$\dfrac{5}{16}$

解析 Sol 一:設擲四枚硬幣，樣本空間 S，則 $n(S)=2^4=16$

恰三次正面的事件為 A，則 $n(A)=C^4_3=4$

至少三次正面的事件為 B，則 $n(B)=C^4_3+C^4_4=5$

所以 $P(A)=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$，$P(B)=\dfrac{5}{16}$

Sol 二(1) $C^4_3(\dfrac{1}{2})(\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{1}{4}$ (2) $C^4_3(\dfrac{1}{2})(\dfrac{1}{2})^3+C^4_4(\dfrac{1}{2})^4=\dfrac{5}{16}$

7.一袋中有 3 個紅球和 5 個白球，共 8 個球，從袋中逐次取球，每次取出一球，且取出的球不放回，若取每一球的機會相同，A 表第一次取出的球是白球的事件，B 表第二次取出的球是紅球的事件，則

(1)$P(B)=$____________，(2)$P(A \mid B)=$____________ .

解答 (1)$\dfrac{3}{8}$;(2)$\dfrac{5}{7}$

解析 $P(B)=P(A)\cdot P(B \mid A)+P(A')\cdot P(B \mid A')=\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{3}{7}+\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{2}{7}=\dfrac{21}{56}=\dfrac{3}{8}$

$P(A \mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}}{\frac{3}{8}}=\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{8}{3}=\dfrac{5}{7}$

8.投擲公正的硬幣三次，則

(1)至少兩次正面的機率為____________;

(2)若已知至少兩次正面出現，則恰好是兩次正面出現的機率為____________ .

解答 (1)$\dfrac{1}{2}$;(2)$\dfrac{3}{4}$

解析 (1)三次中至少兩次正面的情況，有兩次及三次兩種，其機率分別為$C^3_2(\dfrac{1}{2})(\dfrac{1}{2})^2$及$C^3_3(\dfrac{1}{2})^3$

所以至少兩次正面的機率為$\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

(2)在至少兩次正面的條件下，恰兩次正面的機率 $=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$

9.袋中有 3 個紅球，2 個白球，1 個黑球，每球被取的機會相同，

(1)若一次取兩球，則兩球同色的機率為____________．

(2)若一次取三球，則三球均不同色的機率為____________．

解答 (1)$\frac{4}{15}$;(2)$\frac{3}{10}$

解析 (1)設一次取兩球的樣本空間 S，$n(S)=C^6_2=15$，取到兩球同色的事件 A，

即 2 紅或 2 白 $n(A)=C^3_2+C^2_2=4$，所以 $P(A)=\frac{4}{15}$

(2)一次取三球，三球均不同色的機率=$\frac{C^3_1C^2_1C^1_1}{C^6_3}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

10.某公司生產的省電燈泡由甲廠、乙廠、丙廠生產的比例是 40%，35%，25%，根據統計，甲廠、乙廠、丙廠生產的瑕疵品分別占各廠生產品的比例為 1.3%，1.2%，1.5%，若將公司生產的燈泡集中在倉庫裡，從中任取一個燈泡，則(1)取到瑕疵品的機率為____________；

(2)若從中取得的燈泡是瑕疵品，則此燈泡是甲廠生產的機率為____________．

解答 (1)0.01315;(2)0.3954

解析 (1)取到瑕疵品的機率 $=40\%\times 1.3\%+35\%\times 1.2\%+25\%\times 1.5\%=\frac{263}{20000}$

(2)條件機率 $=\frac{40\%\times 1.3\%}{0.01315}=\frac{104}{263}$

11.袋中有 10 張籤條，其中 3 張有獎，今從袋中一次抽取一張籤條，共取 10 次，將籤條取完，則

(1)第二張中獎的機率為____________，(2)第八張中獎的機率為____________．

解答 (1)$\frac{3}{10}$;(2)$\frac{3}{10}$

解析 (1)第二張中獎的機率 $=\frac{3\times 9!}{10!}=\frac{3}{10}$ (2)第八張中獎的機率 $=\frac{3\times 9!}{10!}=\frac{3}{10}$

12.一袋中有 3 白球、4 紅球、5 黑球，今從袋中逐次取球．每次一球，取 3 次，取出不放回．若袋中每一球被取中的機會均等，則

(1)三球為兩色的機率為____________．

(2)第三次取中白球的機率為____________．

(3)若已知取出三球為兩色，則第三次取中白球的機率為____________．

(4)若已知第三次取中白球，則三球恰為兩色的機率為____________．

解答 (1)$\frac{29}{44}$;(2)$\frac{1}{4}$;(3)$\frac{34}{145}$;(4)$\frac{34}{55}$

解析 (1)令 A 表三球恰為兩色的事件：(任三球) − (三球三色) − (三球一色)

$n(A)=P^{12}_{3}-(C^{3}_{1}\times C^{4}_{1}\times C^{5}_{1}\times 3!)-(P^{3}_{3}+P^{4}_{3}+P^{5}_{3})=1320-360-90=870$

$\therefore\ P(A)=\dfrac{870}{12\times11\times10}=\dfrac{29}{44}$

(2)第三次取到白球的機率＝第一次取到白球的機率

設 B 表第三次取中白球的事件

$\therefore\ P(B)=$(第一次取中白球機率)$=\dfrac{3\times11\times10}{12\times11\times10}=\dfrac{1}{4}$

(3)$P(B\mid A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$

$A\cap B$ 表三球兩色且第三次白球的事件，其情況有

(白，紅，白)，(紅，白，白)，(黑，白，白)，(白，黑，白)，(紅，紅，白)，　(黑，黑，白)

$\therefore\ n(A\cap B)=3\times4\times2+4\times3\times2+5\times3\times2+3\times5\times2+4\times3\times3+5\times4\times3=204$

$\Rightarrow P(B\mid A)=\dfrac{204}{870}=\dfrac{34}{145}$

(4) $n(B)=3\times11\times10=330$　$P(A\mid B)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(B)}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}=\dfrac{204}{330}=\dfrac{34}{55}$

13.已知路旁有 10 棵樹，將它們任意編號為 1，2，3，…，9，10，且其中有三棵松樹，則編號為 4 與 5 都是松樹的機率為____________ .

解答　$\dfrac{1}{15}$

解析　三棵松樹的編號中有兩棵編 4、5 的方法數為 $C^{3}_{2}\times2!\times8!$.

10 棵樹任意編號有 10！方法

三棵松樹編號為 4 與 5 的機率 $\dfrac{3\times2!\times8!}{10!}=\dfrac{1}{15}$

14.甲、乙、丙三個人投籃的命中率依次分別是 0.6，0.8，0.4，今三個人各投籃一次，且投籃時互不影響，則(1)甲、乙兩人中恰一人投進的機率 ＝_________，(2)甲、乙、丙三人中恰兩人投進的機率 ＝________ .

解答　(1)0.44;(2)0.464

解析　(1)甲、乙兩人恰一人投進的機率 $=0.6\times0.2+0.4\times0.8=0.44$

(2)甲、乙、丙三人中恰兩人投進的機率

$=0.6\times0.8\times0.6+0.6\times0.2\times0.4+0.4\times0.8\times0.4=0.464$

15.一不公正骰子，每面出現之機率與其點數成正比，擲此骰子 2 次，求點數和為 10 之機率為____________ .

解答　$\dfrac{73}{441}$

解析　$P(1):P(2):P(3):P(4):P(5):P(6)=k:2k:3k:4k:5k:6k$

$\Rightarrow\quad k+2k+3k+4k+5k+6k=21k=1\quad\Rightarrow\quad k=\dfrac{1}{21}$

點數和為 10 的情形有(4，6)，(5，5)，(6，4) 故所求 $=\dfrac{4}{21}\times\dfrac{6}{21}+\dfrac{5}{21}\times\dfrac{5}{21}+\dfrac{6}{21}\times\dfrac{4}{21}=\dfrac{73}{441}$

16.設甲袋中有藍球 3 個，白球 5 個，乙袋中有藍球 2 個，白球 1 個，紅球 2 個，今投擲一公正骰子，若出現點數為么點或 6，則從甲袋任取一球，若出現其他點數，則從乙袋任取一球．求選取一白球之機率為_____.

解答 $\dfrac{41}{120}$

解析 設 A，B 分別表選甲袋、乙袋的事件，W 表選取一白球的事件

則 $P(A)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$， $P(B)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ P(W)=P(A)P(W\mid A)+P(B)P(W\mid B)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{5}{8}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{5}{24}+\dfrac{2}{15}=\dfrac{25+16}{120}=\dfrac{41}{120}$

17.自一副撲克（A poker hand）牌 52 張中任取 5 張，

(1)求 5 張牌成為「富而好施」（Full house），即點數如(x，x，y，y，y)的形式，但 x，y 是不同點數的機率為____________．

(2)求 5 張牌成為「兩對」（Two pairs），即點數如(x，x，y，y，z)的形式，但 x，y，z 是不同點數的機率為____________．

解答 (1) $\dfrac{6}{4165}$;(2) $\dfrac{198}{4165}$

解析 (1) $P=\dfrac{C^{13}_{2}\times 2!\times C^4_2C^4_3}{C^{52}_5}=\dfrac{13\times12\times6\times4}{\dfrac{52\times51\times50\times49\times48}{1\times2\times3\times4\times5}}=\dfrac{6}{4165}$

(2) $P=\dfrac{C^{13}_{3}\times\dfrac{3!}{2!}C^4_2C^4_2C^4_1}{C^{52}_5}=\dfrac{13\times6\times11\times6\times6\times4}{\dfrac{52\times51\times50\times49\times48}{1\times2\times3\times4\times5}}=\dfrac{198}{4165}$

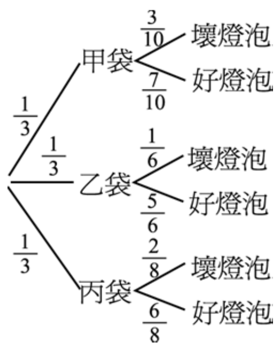
18.利用簡單隨機抽樣，若從全體 50 位學生中任意抽取一位學生，則編號第 35 號的學生，在第 13 次被抽出的機率為____________．

解答 $\dfrac{1}{50}$

解析 全部的排列數為 $50!$，將 35 號排在第 13 次抽出的排列數為 $49!$ $\Rightarrow$ $\dfrac{49!}{50!}=\dfrac{1}{50}$

19.設甲袋中有 10 個電燈泡，其中 3 個壞的；乙袋中有 6 個電燈泡，其中 1 個壞的；丙袋中有 8 個電燈泡，其中 2 個壞的；若任選一袋，由選出袋中任取一燈泡（選袋、選燈泡的機會均等），則抽中一個壞燈泡的機率為_________．

解答 $\dfrac{43}{180}$



解析 設 A，B，C 分別表選甲袋、乙袋、丙袋的事件，

設 D 表抽到一壞燈泡的事件，則

$P(D)=P(A)P(D\mid A)+P(B)P(D\mid B)+P(C)P(D\mid C)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{8}$

$=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{18+10+15}{180}=\dfrac{43}{180}$

20.甲，乙二人打靶，甲平均每 4 發打中 3 發，乙平均每 3 發打中 2 發，今二人各射 2 發，則

(1)此靶面未被射中的機率為____________．

(2)A 表靶面恰射中 2 發的事件，B 表甲與乙各射中 1 發的事件， 則 $P(A)=$______，$P(B\mid A)=$________．

解答 (1) $\frac{1}{144}$;(2) $\frac{37}{144}$ ， $\frac{24}{37}$

解析 (1)甲射 2 發均未打中且乙射 2 發均未打中之機率 p，則 $p=(\frac{1}{4})^2\times(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{144}$

(2) $P(A)=(\frac{3}{4})^2\cdot(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{4})^2(\frac{2}{3})^2+(C_1^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4})(C_1^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3})=\frac{37}{144}$

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{C_1^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot C_1^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{37}{144}}=\frac{\frac{24}{144}}{\frac{37}{144}}=\frac{24}{37}$$

21.同時投擲三粒公正的骰子，則出現點數和為 5 的倍數的機率為____________.

解答 $\frac{43}{216}$

解析 同時投擲三粒骰子點數和為 5 的倍數者有

①點數和 ＝5 者有(1，1，3)，(1，2，2)

②點數和 ＝10 者有

(1，3，6)，(1，4，5)， (2，2，6)，(2，3，5)，(2，4，4)，(3，3，4)

③點數和 ＝15 者有(3，6，6)，(4，5，6)，(5，5，5)

故所求機率為 $\frac{\frac{3!}{2!}\times6+3!\times4+\frac{3!}{3!}}{6^3}=\frac{43}{216}$

22.若甲、乙兩人各擲一枚公正的骰子一次，則甲的點數大於乙的點數的機率為____________.

解答 $\frac{5}{12}$

解析 Sol 一:甲的點數 ＝ 乙的點數的機率為 $\frac{6}{36}$.甲的點數大於乙的點數的機率為 $\frac{1}{2}(1-\frac{6}{36})=\frac{5}{12}$

Sol 二: $\frac{C_2^6}{6^2}=\frac{15}{36}$

23.甲、乙兩人輪流擲二粒公正骰子，先擲得點數和大於 7 的人為勝，若甲先擲，則甲得勝的機率為________.

解答 $\frac{12}{19}$

解析 $a+b=12 \Rightarrow$ 1 組

$a+b=11 \Rightarrow$ 2 組

$a+b=10 \Rightarrow$ 3 組

$a+b=9 \Rightarrow$ 4 組

$a+b=8 \Rightarrow$ 5 組

$\because$ 擲得點數和大於 7 之機率為 $\frac{1+2+3+4+5}{36}=\frac{5}{12}$

$\therefore$ 甲得勝的機率 $=\frac{5}{12}+(\frac{7}{12})^2(\frac{5}{12})+(\frac{7}{12})^4(\frac{5}{12})+\cdots=\frac{\frac{5}{12}}{1-(\frac{7}{12})^2}=\frac{12}{19}$

24.甲，乙，丙三人同射一目標靶，三人的命中率依次為$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{3}{5}$，且各人命中靶的事件為獨立事件，則

(1)若每人各射一發，則此靶恰中一彈的機率為____________.

(2)若每人各射一發，則此靶中彈的機率為____________.

(3)若甲、乙兩人各發一發，則丙至少需射擊____________發子彈，方能使此靶中彈的機率大於 0.99 .（已知 $\log 2 = 0.3010$）

解答　(1) $\frac{11}{25}$;(2) $\frac{21}{25}$;(3)5

解析　(1)靶恰中一發，表示三人中恰有一人擊中靶的事件

故其機率 $= \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{11}{25}$

(2)每人各射一發，靶中彈表示三人中至少有一人擊中靶的事件

故所求機率 $= 1 - P(\text{三人均不中}) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{21}{25}$

(3)設丙發射 n 發，而甲、乙各發射一發，則靶中彈的機率為

$1 - (\frac{1}{2})(\frac{4}{5})(\frac{2}{5})^n > 0.99 \Rightarrow \frac{4}{10}(\frac{2}{5})^n < 0.01 \Rightarrow (\frac{2}{5})^n < \frac{1}{40} \Rightarrow n\log\frac{2}{5} < -\log 40$

$\Rightarrow n(\log 4 - \log 10) < -(\log 4 + \log 10) \Rightarrow n > \frac{1+2\log 2}{1-2\log 2} \doteqdot 4.03$

故丙至少需射 5 發，方能使靶中彈的機率 > 0.99

25.假設任意取得統一發票三張（每一張的個位數字的號碼可以是 0，1，2，3，⋯，8，9 之中的任一個數)，求三張發票的個位數字的號碼中

(1)至少有一個 3 的機率為____________.

(2)至少有一個 1 且至少有一個 9 的機率為____________.（用小數表示到小數點後第三位）

解答　(1)0.271;(2)0.054

解析　(1)至少有一張統一發票的個位數字的號碼為 3 的機率

$= 1 - (\text{個位數字都不是 3 的機率}) = 1 - (\frac{9}{10})^3 = 1 - 0.729 = 0.271$

(2)至少有一張個位數字為 1 且至少有一張個位數字為 9 的機率

= (有兩張為 9，另一張為 1 的機率) + (有兩張為 1，另一張為 9 的機率)

+ (有一張為 9，一張為 1，另一張為其他數字的機率)

$= 3 \times (\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}) + 3 \times (\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}) + 3! \times (\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{8}{10}) = \frac{3}{1000} + \frac{3}{1000} + \frac{48}{1000} = \frac{54}{1000} = 0.054$

26.從不大於 600 的自然數中，任取一數，則其與 600 互質之機率為____________.

解答　$\frac{4}{15}$

解析　$\because$ $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$，1～600 的自然數中

2 的倍數有 300 個，3 的倍數有 200 個，5 的倍數有 120 個，6 的倍數有 100 個

10 的倍數有 60 個，15 的倍數有 40 個，30 的倍數有 20 個

故與 600 互質者共有 $600 - (300 + 200 + 120 - 100 - 60 - 40 + 20) = 160$ 個

$\therefore$ 所求機率 $= \frac{160}{600} = \frac{4}{15}$