

高雄市明誠中學 高一數學平時測驗		日期：105.04.29	
範圍	2-3.4 組合.二項式	班級	一年____班
		座號	
		姓名	

一、填充題(每題 10 分)

1. 10 個相同物分給 3 人

(1)分法有_____種.

(2)若每人至少一個，則分法有_____種.

答案：(1)66 (2)36

解析：(1) $C_{10}^{3+10-1} = C_{10}^{12} = C_2^{12} = \frac{12 \times 11}{1 \times 2} = 66$

(2) $C_7^{3+7-1} = C_7^9 = C_2^9 = \frac{9 \times 8}{1 \times 2} = 36$

2. 將 3 個蘋果、4 個桃子、2 個李子全部分給 9 個兒童，每人至多得一個，共有_____種不同的分法.若分給 11 個兒童，每人至多得一個，則共有_____種不同的分法.

答案：1260, 69300

解析：(1) $\frac{9!}{3!4!2!} = 1260$ (2) $\frac{11!}{3!4!2!2!} = 69300$

3. 有橘子 5 個，蘋果 4 個，將此 9 個水果全部分給甲、乙兩人，求下列各方法數：

(1)每人至少一個有_____種方法.

(2)每人每種水果至少一個有_____種方法.

答案：(1)28 (2)12

(1) $C_5^{2+5-1} \times C_4^{2+4-1} - 1 - 1 = 28$

解析：

甲 乙
未 未
分 分
到 到

(2) $C_3^{2+3-1} \times C_2^{2+2-1} = (3+1)(2+1) = 12$

4. 求 $(1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots + (1+x)^{10}$ 中， x^4 項的係數為_____.

答案：462

解析： $(1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots + (1+x)^{10}$
 $= \frac{(1+x)[(1+x)^{10} - 1]}{(1+x) - 1} = \frac{(1+x)^{11} - (1+x)}{x}$

則 x^4 項的係數 = $(1+x)^{11}$ 展開式中 x^5 項的係數 = $C_5^{11} = 462$

5. 試回答下列小題：

(1)將 6 件相異物，放入三個相異的箱子，每箱各放 3 件，2 件，1 件，其放法有_____種.

(2)將 7 件相異物，放入三個相異的箱子，每箱各放 2 件，2 件，3 件，其放法有_____種.

(3)將 9 件相異物，放入三個相異的箱子，每箱各放 3 件，其放法有_____種.

答案：(1)360 (2)630 (3)1680

解析：(1) $C_3^6 C_2^3 C_1^1 \times 3! = 360$ (2) $C_2^7 C_2^5 C_3^3 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 630$ (3) $C_3^9 C_3^6 C_3^3 \times \frac{1}{3!} \times 3! = 1680$

6. A, B, C, D, ... 等八人排成一列，則：

(1)A 在 B 之左，C 在 D 之右，排法有_____種.

(2)A 在 B, C 之左，D 在 E, F 之左，排法有_____種.

(3)A 在 B, C, D 之左，E 在 F, G 之左，排法有_____種.

答案：(1)10080 (2)4480 (3)3360

解析：(1) $\frac{8!}{2!2!} = 10080$ (2) $\frac{8!}{3!3!} \cdot \frac{2!}{BC互換} \cdot \frac{2!}{EF互換} = 4480$ (3) $\frac{8!}{4!3!} \cdot \frac{3!}{BCD互換} \cdot \frac{2!}{FG互換} = 3360$

7. 若 $C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 + \dots + C_2^{98} + C_2^{99} = C_m^n$ ，且 $m < 5$ ，則 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案：100, 3

解析：將 C_2^2 改成 C_3^3 ，得 $C_3^3 + C_2^3 + C_2^4 + \dots + C_2^{99} = C_3^{100} (= C_{97}^{100}) \therefore n = 100, m = 3$ (97 不合)

8. 設 $C_{2m}^{46} = C_{m+1}^{46}$ ，則 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案：1 或 15

解析：(1) $2m = m + 1 \Rightarrow m = 1$

(2) $46 - 2m = m + 1 \Rightarrow m = 15$

9. 將 4 枝相同的鉛筆及 5 本相同的筆記本分給甲、乙、丙三位小朋友，物必分完，若

(1) 每人可兼得，則有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 種分法。

(2) 每人每樣至少得一件，又有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 種分法。

答案：(1) 315 (2) 18

解析：(1) $C_4^{3+4-1} \times C_5^{3+5-1} = C_4^6 \times C_5^7 = 315$

(2) $C_1^{3+1-1} \times C_2^{3+2-1} = C_1^3 \times C_2^4 = 18$

10. 啦啦隊競賽規定每隊 8 人，且每隊男、女生均至少要有 2 人。某班共有 4 名男生及 7 名女生想參加啦啦隊競賽，若由此 11 人中依規定選出 8 人組隊，則共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 種不同的組隊方法。

答案：161

解析：由題意知，取法如下

$$(二男六女) + (三男五女) + (四男女) = C_2^4 C_6^7 + C_3^4 C_5^7 + C_4^4 C_4^7 = 42 + 84 + 35 = 161$$

11. 有 3 公分與 2 公分之兩種紙條若干張，自上至下連接成 14 公分之紙帶上下掛起來，但每一連接處為 1 公分，則有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 種不同的連接方法。

答案：377

解析：設有 x 張 3 公分， y 張 2 公分

$$3x + 2y + (x + y - 1)(-1) = 14 \Rightarrow 2x + y = 13$$

x	6	5	4	3	2	1	0
y	1	3	5	7	9	11	13

$$\frac{7!}{6!} + \frac{8!}{5!3!} + \frac{9!}{5!4!} + \frac{10!}{7!3!} + \frac{11!}{9!2!} + \frac{12!}{11!} + \frac{13!}{13!} = 7 + 56 + 126 + 120 + 55 + 12 + 1 = 377$$

12. $(3 + 2x + x^2)(2 - x)^6$ 的展開式中， x^5 的係數為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案：-76

解析：考慮 $(2 - x)^6$ 展開式中， x^5, x^4, x^3 的係數

$$\because (2 - x)^6 = \sum_{r=0}^6 C_r^6 2^{6-r} (-x)^r = \sum_{r=0}^6 C_r^6 \cdot 2^{6-r} \cdot (-1)^r \cdot x^r$$

$$\text{令 } r = 3 \Rightarrow C_3^6 2^3 (-1)^3 = -20 \times 8 = -160$$

$$\text{令 } r = 4 \Rightarrow C_4^6 \cdot 2^2 = 15 \times 4 = 60$$

$$\text{令 } r = 5 \Rightarrow C_5^6 \cdot 2^1 \cdot (-1)^5 = -12$$

$$\text{故所求} = 1 \times (-160) + 2 \times 60 + 3 \times (-12) = -160 + 120 - 36 = -76$$

13. 有 5 種酒及 4 個酒杯，規定每個酒杯限倒一種酒，不得有空杯，若

(1) 酒杯是相同的，則有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 種倒法。

(2)酒杯是相異的，則有_____種倒法。

答案：(1)70 (2)625

解析：(1) $C_4^{5+4-1} = C_4^8 = 70$ (2) $5^4 = 625$

14. 有五位選舉人，投票給三個候選人，每人限投一票，記名投票，而且沒有廢票，有_____選法。

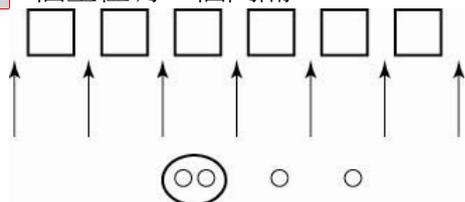
答案：243

解析： $3^5 = 243$

15. 戲院中一排共有 10 個座位，A, B, C, D 四人任選一個位子就坐，則四人中，恰兩人座位相鄰，有_____種坐法

答案：2520

解析：6 個空位有 7 個間隔



$$C_2^4 \cdot P_1^7 \cdot P_2^6 \cdot 2! = 6 \times 7 \times 30 \times 2 = 2520$$

16. $(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^{10}$ 展開式中，常數項為_____。

答案：210

解析：設一般項為 $C_r^{10} (\sqrt[3]{x})^{10-r} (\frac{-1}{\sqrt{x}})^r = C_r^{10} x^{\frac{10-r}{3}} (-1)^r \cdot x^{-\frac{r}{2}} = C_r^{10} (-1)^r \cdot x^{\frac{10-r}{3} - \frac{r}{2}} = C_r^{10} (-1)^r \cdot x^{\frac{20-5r}{6}}$

$$\text{令 } \frac{20-5r}{6} = 0 \Rightarrow r = 4 \quad C_4^{10} (-1)^4 = 210$$

17. 由五對夫妻中任選三人組成委員會，

(1)若規定夫妻不得同時當選，共有_____種選法。

(2)若五對夫妻中恰有一對李姓夫妻，則李先生或李太太至少有一人當選的方法有_____種。

答案：(1)80 (2)64

解析：(1) $C_5^3 \times 2^3 = 80$

(2)李姓夫妻恰有一人當選： $C_1^2 C_2^8 = 56$ ，李姓夫妻都當選： $C_1^8 = 8$ 共 64 種

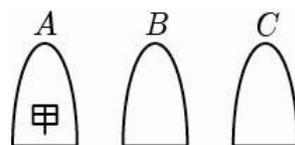
18. 渡船三隻，每船可載五人，今有七人要同時通過，且甲必坐 A 船，有_____種方法。

答案：714

解析：剩餘 6 人，每人有 3 種選擇，再扣去不合的有兩種：

(1)剩下 6 人共乘一船 (2)6 人中有 5 人與甲同船，另一人乘坐另一艘船

$$3^6 - 3 - C_5^6 \times 2! = 729 - 3 - 12 = 714$$



19. $x + y + z + u \leq 10$ 之整數解中，求：

(1)非負整數解有_____組。

(2)正整數解有_____組。

答案：(1)1001 (2)210

解析：(1)設 $t \geq 0$ ，得 $x + y + z + u + t = 10$ 的非負整數解有 $C_{10}^{5+10-1} = C_{10}^{14} = 1001$

(2) $x + y + z + u + t = 10$ 的正整數解為

$$\text{設 } x' = x + 1, y' = y + 1, z' = z + 1, u' = u + 1$$

$$\text{代入原式 } x' + y' + z' + u' + t = 6 \quad \text{其正整數解有 } C_6^{5+6-1} = C_6^{10} = 210$$

20. 設 $1 - \frac{1}{3} \times C_1^n + (-\frac{1}{3})^2 \times C_2^n + (-\frac{1}{3})^3 \times C_3^n + \cdots + (-\frac{1}{3})^n \times C_n^n < \frac{1}{5000}$ ，則 n 的最小自然數為_____。

答案：22

解析： $(1+x)^n = 1 + C_1^n x + C_2^n x^2 + C_3^n x^3 + \cdots + C_n^n x^n$

令 $x = -\frac{1}{3}$ ，得 $(1 - \frac{1}{3})^n = 1 - \frac{1}{3} \times C_1^n + (-\frac{1}{3})^2 \times C_2^n + \cdots + (-\frac{1}{3})^n \times C_n^n$

$$\parallel$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{5000} \text{ (兩邊取常用對數)}$$

$$\Rightarrow n(\log 2 - \log 3) < \log 2 - 4$$

$$\Rightarrow n > \frac{4 - 0.3010}{0.4771 - 0.301} \approx 21. \dots$$

n 的最小自然數為 22

21. 從 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 中任取兩數，則：

- (1) 其方法數為_____。
- (2) 選出兩數，其和為奇數之方法數為_____。
- (3) 選出兩數，其和為偶數之方法數為_____。
- (4) 選出兩數，其積為奇數之方法數為_____。
- (5) 選出兩數，其積為偶數之方法數為_____。

答案：(1)21 (2)12 (3)9 (4)6 (5)15

解析：(1) $C_2^7 = 21$

(2) 1 奇 1 偶： $C_1^4 C_1^3 = 12$

(3) 2 奇或 2 偶： $C_2^4 + C_2^3 = 6 + 3 = 9$

(4) 2 奇： $C_2^4 = 6$

(5) $21 - 6 = 15$

22. factoring 中各字母全取排成一列，則

- (1) 母音保持 a, o, i 之順序有_____種排法。
- (2) 子音保持 f, c, t, r, n, g 之順序有_____種排法。
- (3) 母音保持 a, o, i 之順序同時子音保持 f, c, t, r, n, g 之順序有_____種排法。

答案：(1)60480 (2)504 (3)84

解析：(1) $\frac{9!}{3!} = 60480$ (2) $\frac{9!}{6!} = 504$ (3) $\frac{9!}{6!3!} = 84$

23. 將 6 個相同的紅球，4 個相同的白球放入 3 個相異的箱子中，有_____種不同方法。

答案：420

解析： $C_6^{3+6-1} \times C_4^{3+4-1} = C_6^8 \times C_4^6 = C_2^8 \times C_2^6 = 28 \times 15 = 420$

24. 甲、乙、丙、丁、...等 9 人欲平分分成 3 組，參加三對三的籃球鬥牛比賽，因甲、乙兩人實力最強，必須分配在不同組，且丙丁兩人默契最好，需分在同一組，其他 5 人則沒限制，則滿足上述條件的分配方式有_____組。

答案：50

解析：(1) 丙丁與甲或乙同組 $2 \times C_2^5 \times C_3^3 = 20$

(2) 丙丁不與甲且不與乙同組 $C_1^5 \times C_2^4 \times C_2^2 = 30$

共有 $20 + 30 = 50$

25. 籃球 3 人鬥牛賽，共有甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬 9 人參加，組成 3 隊，且甲、乙

兩人不在同一隊的組隊方法有_____種.

答案：210

解析： $(C_2^7 \times C_2^5 \times C_3^3 \times \frac{1}{2!}) \times 2! = 210$

26. 由甲、乙、丙、丁、戊、...等 10 人中，任選 5 人，則：
- (1)有_____種方法.
 - (2)必含甲，有_____種方法.
 - (3)必不含甲，有_____種方法.
 - (4)不含乙，必含甲，有_____種方法.
 - (5)恰含甲、乙其中一人，有_____種方法.
 - (6)恰含甲、乙、丙、丁、戊五人之中三人，有_____種方法.
 - (7)恰含甲、乙、丙、丁、戊五人之中一人，有_____種方法.

答案：(1)252 (2)126 (3)126 (4)70 (5)140 (6)100 (7)25

解析：(1) $C_5^{10} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$

(2) $C_4^9 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$

(3) $C_5^9 = 126$

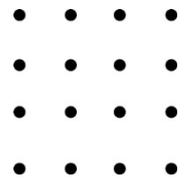
(4) $C_4^8 = 70$

(5) $C_1^2 C_4^8 = 140$

(6) $C_3^5 C_2^5 = 10 \times 10 = 100$

(7) $C_1^5 C_4^5 = 5 \times 5 = 25$

27. 設有 16 個點排成如下圖之正方形，則
- (1)連結這 16 個點可決定出_____條直線.
 - (2)以這些點為頂點所作之三角形有_____個.



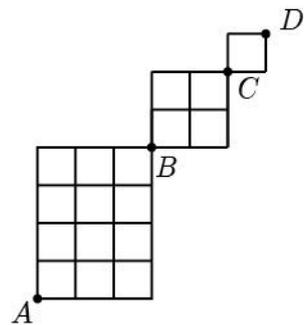
答案：(1)62 (2)516

解析：(1) $C_2^{16} - 10 \times C_2^4 + 10 - 4 \times C_2^3 + 4 = 62$

四點共線者
三點共線者

(2) $C_3^{16} - 10 \times C_3^4 - 4 \times C_3^3 = 516$

28. 如圖，棋盤式街道，今小偉從 A 到 B 走捷徑，有_____種走法.
若從 A 到 D 走捷徑，有_____種走法.



答案：35,420

解析：A 到 B: $\frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$

A - B - C - D: $\frac{7!}{4! \cdot 3!} \times \frac{4!}{2! \cdot 2!} \times 2! = 35 \times 6 \times 2 = 420$

29. 某動物園的遊園列車依序編號 1 到 7，共有 7 節車廂，今想將每節車廂畫上一種動物. 如果其中的兩節車廂畫企鵝，另兩節車廂畫無尾熊，剩下的三節車廂畫上貓熊，並且要求最中間的三節車廂必須有企鵝、無尾熊及貓熊，則 7 節車廂一共有_____種畫法.

答案：72

解析：△：企鵝，×：無尾熊，○：貓熊

$$3! \times \frac{4!}{2!} = 72$$

\downarrow \downarrow
 $\boxed{\Delta \times \bigcirc}$ 其餘 $\Delta \times \bigcirc \bigcirc$ 排列
 排列

30. 設 5 種酒倒入 3 個酒杯，(但不能有空杯亦不能混合)則：
- (1)若酒杯相異，而各杯酒異同皆可，則倒法有_____種.
 - (2)若酒杯相異，而各杯酒皆相異，則倒法有_____種.
 - (3)若酒杯相同，而各杯酒異同皆可，則倒法有_____種.
 - (4)若酒杯相同，而各杯酒皆相異，則倒法有_____種.

答案：(1)125 (2)60 (3)35 (4)10

解析：(1) $5^3 = 125$
 (2) $P_3^5 = 5 \times 4 \times 3 = 60$
 (3) $C_3^{5+3-1} = C_3^7 = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35$
 (4) $C_3^5 = 10$

31. 三枝相同的鋼筆，五枝相同的原子筆，分給 10 人，每人至多得一件，則有_____種分法.

答案：2520

解析：鉛鉛鉛原原原原原 $\boxed{\text{不得}}$ $\boxed{\text{不得}}$
 排成一列的排法有 $\frac{10!}{3!5!2!} = 2520$

32. 將甲、乙……等 10 人分為 3 人，3 人，4 人等三組住入 A, B, C 三室，其中甲、乙兩人需住同一室，則住法有_____種.

答案：3360

解析： $C_1^8 C_3^7 C_4^4 \times 3! + C_2^8 C_3^6 C_3^3 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 3360$

33. 四個不同的獎品，分給三人，每人可兼得或不得每件獎品，試問：

- (1)共有_____種分法.
- (2)某甲不得任一件獎品，有_____種分法.
- (3)某甲至少得一件獎品，有_____種分法.
- (4)某甲恰得一件獎品，有_____種分法.
- (5)某甲至少得兩件獎品，有_____種分法.

答案：(1)81 (2)16 (3)65 (4)32 (5)33

解析：(1) $3^4 = 81$
 (2) $2^4 = 16$
 (3) $3^4 - 2^4 = 81 - 16 = 65$
 (4) $C_1^4 \cdot 2^3 = 32$
 (5) $81 - 16 - 32 = 33$

34. (1)5 個相同的球，在地上分成三堆，則其分法有_____種.
 (2)5 個不同的球，在地上分成三堆，則其分法有_____種.
 (3)5 個相同的球，任意分給甲、乙、丙三人，則其分法有_____種.
 (4)5 個不同的球，任意分給甲、乙、丙三人，則其分法有_____種.

答案：(1)5 (2)41 (3)21 (4)243

解析：(1) $5 = (5, 0, 0) = (4, 1, 0) = (3, 2, 0) = (3, 1, 1) = (2, 2, 1)$ ，5種

$$(2) C_5^5 + C_4^5 C_1^1 + C_3^5 C_2^2 + \frac{C_3^5 C_1^2 C_1^1}{2!} + \frac{C_2^5 C_2^3 C_1^1}{2!} = 41$$

$$(3) C_5^{3+5-1} = C_5^7 = 21$$

$$(4) 3^5 = 243$$

35. 將 $(100 + \frac{1}{10})^{11}$ 展開，則小數點後第一位的數字為_____。

答案：6

$$\text{解析：} (100 + \frac{1}{10})^{11} = \sum_{r=0}^{11} C_r^{11} 100^{11-r} \cdot (\frac{1}{10})^r = \sum_{r=0}^{11} C_r^{11} (10^2)^{11-r} \cdot (10^{-1})^r = \sum_{r=0}^{11} C_r^{11} 10^{22-3r}$$

要知道小數點第一位的數字，取 $22 - 3r < 0 \Rightarrow r \geq 8$

$$\text{令 } r=8 \text{ 得 } C_8^{11} \cdot 10^{-2} = C_3^{11} \times \frac{1}{100} = \frac{11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{1}{100} = 1.65$$

$$\text{令 } r=9 \text{ 得 } C_9^{11} \cdot 10^{-5} = \frac{55}{100000} = 0.00055 \Rightarrow \text{太小}$$

故小數點後出現第一個數字為 6

36. 由 0, 1, 2, 3, 4, 5 等 6 個數字中，任取 4 個，作數字不重複的四位數，則這些四位數中，不被 5 整除的有_____個。

答案：192

$$\text{解析：} \underset{\text{個位}}{4} \times \underset{\text{千位}}{4} \times \underset{\text{百,十位}}{P_2^4} = 16 \times 12 = 192$$

37. 某人給 5 封信及 5 個信封，今將 5 封信任意分別裝入 5 個信封(每封信裝入一個信封)，求下列各問題的方法數：

(1) 恰有 2 封信裝錯有_____種。

(2) 恰有 3 封信裝錯有_____種。

(3) 恰有 4 封信裝錯有_____種。

(4) 5 封信全部裝錯有_____種。

答案：(1)10 (2)20 (3)45 (4)44

$$\text{解析：} (1) C_3^5 \times (2! - 2 \times 1! + 0!) = 10$$

$$(2) C_2^5 \times (3! - 3 \times 2! + 3 \times 1! - 0!) = 20$$

$$(3) C_1^5 \times (4! - 4 \times 3! + 6 \times 2! - 4 \times 1! + 0!) = 45$$

$$(4) 5! - 5 \times 4! + 10 \times 3! - 10 \times 2! + 5 \times 1! - 0! = 44$$

38. 將四名公費醫生分配到三個鄉鎮衛生所，每個鄉鎮至少一人，則有_____種不同的分配方法。

答案：36

$$\text{解析：} \text{依題意必為 } 2 \text{ 人, } 1 \text{ 人, } 1 \text{ 人 } C_2^4 \cdot C_1^3 \cdot 2! = 6 \times 3 \times 2 = 36$$

39. 某校辯論社由 5 名男生及 5 名女生組成。現從其中選出 5 人組成代表隊，且男生、女生均至少要有 1 人，則組隊方法共有_____種。

答案：250

$$\text{解析：} \text{任意選，去除掉全部為男生與全部為女生，} C_5^{10} - 2 = 250$$

40. $x + y + z + t^2 = 18$ ，有_____組非負整數解。

答案：542

解析：(1) $t=0: x+y+z=18$ $C_{18}^{3+18-1} = C_{18}^{20} = C_2^{20} = \frac{20 \times 19}{1 \times 2} = 190$

(2) $t=1: x+y+z=17$ $C_{17}^{3+17-1} = C_{17}^{19} = C_2^{19} = \frac{19 \times 18}{1 \times 2} = 171$

(3) $t=2: x+y+z=14$ $C_{14}^{3+14-1} = C_{14}^{16} = C_2^{16} = \frac{16 \times 15}{1 \times 2} = 120$

(4) $t=3: x+y+z=9$ $C_9^{3+9-1} = C_9^{11} = C_2^{11} = \frac{11 \times 10}{1 \times 2} = 55$

(5) $t=4: x+y+z=2$ $C_2^{3+2-1} = C_2^4 = 6$

共有 $190+171+120+55+6=542$