高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：105.03.18					
範圍	2-1 集合.計數原理	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1.「電梯在每一層樓都至少有三人走出來」的否定敘述為____________．

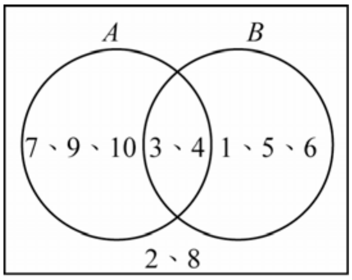
解答　電梯在有的層樓至多有二人走出來

解析　利用$\sim(\forall\, p) \equiv \exists(\sim p)$．

至少有三人走出來，即走出來的人數 ≥ 3，

其否定為「走出來的人數 <3」，即「走出來的人數 ≤ 2」，即至多有二人走出來．

2.設 $U=\{n \mid n\in \mathbb{N}，n\leq 10\}$為宇集，$A$ 與 B 均為 U 之子集，已知 $A\cap B=\{3，4\}$，$A\cap B'=\{7，9，10\}$，$A'\cap B'=\{2，8\}$，則 $B=$____________．



解答　$\{1，3，4，5，6\}$

解析　$U=\{1，2，\cdots，9，10\}$，

$A\cap B=\{3，4\} \;\Rightarrow\; \{3，4\}\subset A，\{3，4\}\subset B$，

$A\cap B'=\{7，9，10\} \;\Rightarrow\; \{7，9，10\}\subset A，\{7，9，10\}\subset B'$，

$A'\cap B'=\{2，8\} \;\Rightarrow\; \{2，8\}\subset A'，\{2，8\}\subset B'$，

$\therefore\; B\cap A'=\{1，5，6\}，\therefore\; A=\{3，4，7，9，10\}，B=\{1，3，4，5，6\}$．

3.設 $A=\{1，3\}$，$B=\{x \mid x^2-3x+a=0\}$，若 $A-B=\{1\}$，則 a 的值為____________．

解答　0

解析　$\because\; A-B=A-(A\cap B)=\{1\}，\therefore\; A\cap B=\{3\}$，

$x=3$ 代入 $x^2-3x+a=0 \;\Rightarrow\; 9-9+a=0 \;\Rightarrow\; a=0$．

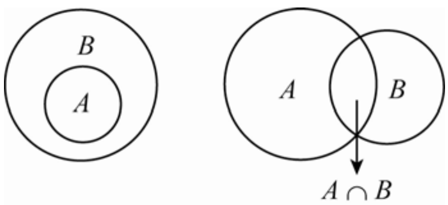
4.若高一同學共 1000 人，其中喜愛數學的有 500 人，喜愛音樂的有 700 人，則兩者都喜愛的最多有(1)____________人，最少有(2)____________人．

解答　(1)500;(2)200

解析　設集合 A 為喜愛數學的人，集合 B 為喜愛音樂的人，則 $n(A)=500$，$n(B)=700$，

(1)當 $A\subset B$ 時，$n(A\cap B)=500$ 為最多．

(2)當 $n(A\cup B)=1000$ 時，$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=500+700-1000=200$ 為最少．



5.設$\{2x，x+y\}=\{6，2\}$，則數對$(x，y)=$____________．

解答　$(3，-1)$或$(1，5)$

解析　若$\{2x，x+y\}=\{6，2\}$，則$\begin{cases}2x=6\\x+y=2\end{cases}$或$\begin{cases}2x=2\\x+y=6\end{cases}$，即$(x，y)=(3，-1)$或$(1，5)$．

6.滿足$\{1，2\}\subset A\subset\{1，2，3，4\}$的集合 A 共有____________個．

解答　4

解析　(1)集合 A 必須有 1，2 兩個元素才使$\{1，2\}\subset A$．

(2)為使 $A \subset \{1，2，3，4\}$，則 A 可在 3 與 4 兩元素中選取，

3	要	要	不要	不要
4	要	不要	要	不要

$\therefore$ A 有 4 個可能．

7.集合 $A = \{x \mid -3 < x < 1，x \in \mathbb{R}\}$，$B = \{x \mid -2 \le x \le 4，x \in \mathbb{R}\}$，若 A，B 的宇集為所有實數 $\mathbb{R}$，A'為 A 的補集，則： (1)$A \cup B =$____________． (2)$A' \cap B =$____________．

解答 (1)$\{x \mid -3 < x \le 4，x \in \mathbb{R}\}$;(2)$\{x \mid 1 \le x \le 4，x \in \mathbb{R}\}$

解析 (1)$A \cup B = \{x \mid -3 < x < 1\} \cup \{x \mid -2 \le x \le 4\} = \{x \mid -3 < x \le 4，x \in \mathbb{R}\}$．

(2)$A' \cap B = \{x \mid x \le -3$ 或 $x \ge 1\} \cap \{x \mid -2 \le x \le 4\} = \{x \mid 1 \le x \le 4，x \in \mathbb{R}\}$．

8.某班人數 60 人，在第一次月考英文、數學、國文三科中，國文及格者 42 人，英文及格者 41 人，數學及格者 39 人，國、英不及格者 11 人，國、數不及格者 13 人，英、數不及格者 14 人，至少一科不及格者 29 人，則： (1)三科均不及格的人數為____________人． (2)至少有二科不及格的人數為____________人．

解答 (1) 9;(2) 20

解析 設$\begin{cases} A：國文不及格者之集合 \\ B：英文不及格者之集合， \\ C：數學不及格者之集合 \end{cases}$

則 $n(A) = 18$，$n(B) = 19$，$n(C) = 21$，$n(A \cap B) = 11$，

$n(B \cap C) = 14$，$n(C \cap A) = 13$，$n(A \cup B \cup C) = 29$，

(1) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$，

$29 = 18 + 19 + 21 - 11 - 14 - 13 + n(A \cap B \cap C)$，得 $n(A \cap B \cap C) = 9$，

即三科均不及格的人數為 9 人．

(2) 所求 $= n[(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)]$

$= n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - n[(A \cap B) \cap (B \cap C)]$

$- n[(B \cap C) \cap (C \cap A)] - n[(C \cap A) \cap (A \cap B)] + n[(A \cap B) \cap (B \cap C) \cap (C \cap A)]$

$= 11 + 14 + 13 - 9 - 9 - 9 + 9 = 20$．

9.設 a 為一整數，二集合 $A = \{2, 3, a^2 - 5a + 10\}$，$B = \{2a - 2, -5a + 13, -a + 6\}$，$A \cap B = \{3, 4\}$，則 $a =$_________．

解答 3

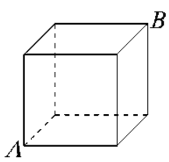
解析 $A \cap B = \{3，4\}$ $\Rightarrow$ $a^2 - 5a + 10 = 4$ $\Rightarrow$ $a^2 - 5a + 6 = 0$ $\Rightarrow$ $a = 2$ 或 3，

① $a = 2$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} A = \{2, 3, 4\} \\ B = \{2, 3, 4\} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $A \cap B \ne \{3，4\}$，故 $a = 2$ 不合．

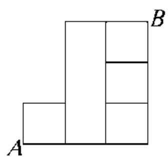
② $a = 3$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} A = \{2, 3, 4\} \\ B = \{4, -2, 3\} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $A \cap B = \{3，4\}$，合理．故 $a = 3$．

10.在圖(一)與圖(二)中，求從 A 走到 B 的捷徑有多少條？

(1)圖(一)，捷徑有____________條． (2)圖(二)，捷徑有____________條．



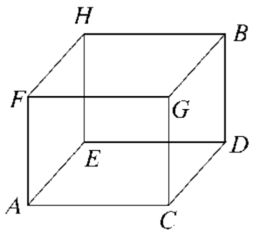
圖( )



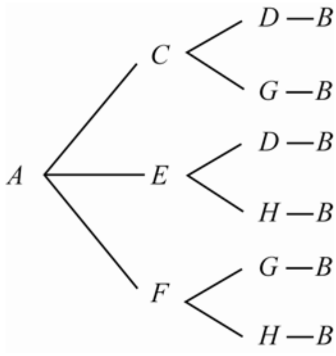
圖(二)

解答 (1)6;(2)6

解析 (1)如圖(一)，由 A 到 B 的捷徑：



圖( )

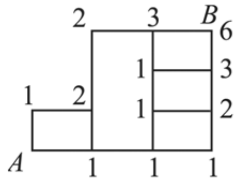


，共有 6 條，

（乘法原理應用）由 A 開始，可在 C，E，F 中任選一條，

然後再朝 B 的捷徑，各有兩條選擇，所以共有 $3 \times 2 = 6$（條）.

(2)如圖(三)： 共 6 條捷徑 .



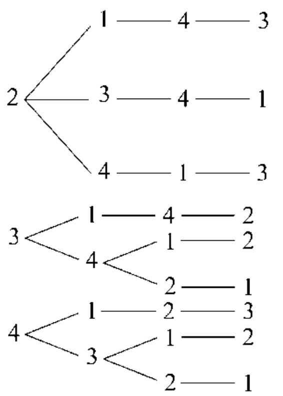
圖(三)

11.設$\{a_1，a_2，a_3，a_4\} = \{1，2，3，4\}$，則滿足$(1 - a_1)(2 - a_2)(3 - a_3)(4 - a_4) \neq 0$ 的情形有__________種 .

解答 9

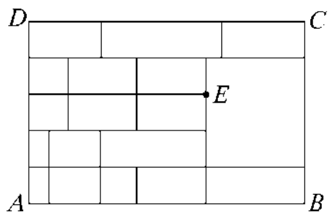
解析 共有 9 種 .

a_1 a_2 a_3 a_4



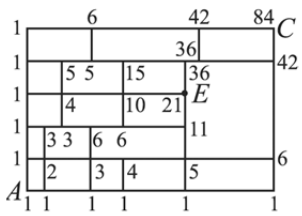
12.某地街道圖如附圖，則：

(1)由 $A \to E$ 走捷徑有______種走法. (2)$A \to C$ 走捷徑有______種走法.



解答 (1)21;(2)84

解析



13.在一場宴會中，與會的 30 人彼此兩兩握手寒暄，如果大家都與自己除外的每一個人握到一次手，則此次宴會中所有人共計握手了__________次 .

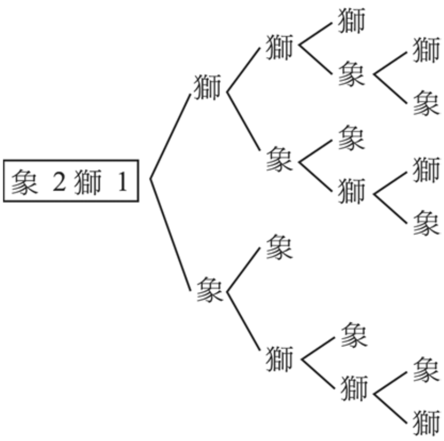
解答 435

解析 $\dfrac{(30-1)\times 30}{2} = 435$（次）.

14.職棒四年季後冠軍爭霸戰，是由季內賽前兩名，作七戰四勝的比賽，爭年度總冠軍，現已賽畢三場，兄弟象二勝一敗領先統一獅，則往後的比賽有__________種結果以決定冠軍 .

解答 10

解析 利用樹形圖：



從象 2 獅 1 開始，往後比賽的情形共有 10 種．

15.7200 之正因數中

(1)共____________個.

(2)為 5 的倍數但不為 9 的倍數者有____________個．

(3)總和為______________.

解答　(1)54,(2)24,(3)25389

解析　$7200 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2$,

(1) $(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5)(3^0+3^1+3^2)(5^0+5^1+5^2)$ 展開式的各項均可,故共有 $6\times3\times3=54$ 個.

(2) $d \mid 7200$ 且 $5 \mid d$，但 $9 \nmid d$，則

d 為$(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5)(3^0+3^1)(5^1+5^2)$展開式的各項均可，故 d 共有 $6\times2\times2=24$ 個．

(3) $(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5)(3^0+3^1)(5^0+5^1+5^2)=63\times13\times31=25389$

16.小於 1000 的自然數中,

(1)不是 3 且不是 5 的倍數者有____________個．

(2)是 3 或 5 或 7 的倍數者有____________個．

(3)是 3 或 5 但不為 7 的倍數者有____________個．

解答　(1)533;(2)542;(3)400

解析　(1) $999-([\frac{999}{3}]+[\frac{999}{5}]-[\frac{999}{15}])=999-333-199+66=533$．

(2) $[\frac{999}{3}]+[\frac{999}{5}]+[\frac{999}{7}]-[\frac{999}{15}]-[\frac{999}{35}]-[\frac{999}{21}]+[\frac{999}{105}]=542$．

(3) $[\frac{999}{3}]+[\frac{999}{5}]-[\frac{999}{15}]-[\frac{999}{35}]-[\frac{999}{21}]+[\frac{999}{105}]=400$．

17.某次數學競試有 100 個學生參加，試題僅 A，B，C 三題，測驗結果如下：答對 A 者有 51 人，答對 B 者有 36 人，只答對 C 者有 16 人，答對 B，C 兩題者有 13 人，答對 A 或 C 者有 75 人，答對 B 或 C 者有 59 人，而只答對 A，B，C 三題之一者有 66 人，則：

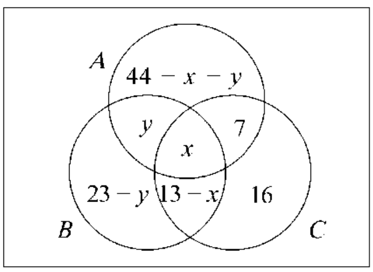
(1)只答對 A 者有____________人．　(2)三題都答錯者有____________人．

解答　(1)33;(2)8

解析　$\begin{cases}51+16+(13-x)=75\\(44-x-y)+(23-y)+16=66\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=5\\y=6\end{cases}$,

(1) $44-5-6=33$（人）.

(2) $n(A\cup B\cup C)=92$，∴　$100-92=8$（人）.



18.1 至 800 的自然數中與 42 互質者有____________個．

解答 229

解析 1 至 800 的自然數中與 42 互質，即去掉 2 或 3 或 7 的倍數

$$\Rightarrow \quad 800-([\frac{800}{2}]+[\frac{800}{3}]+[\frac{800}{7}]-[\frac{800}{6}]-[\frac{800}{21}]-[\frac{800}{14}]+[\frac{800}{42}])$$

$$=800-(400+266+114-133-38-57+19)=229 \text{ ．}$$

19.設一室有 5 個門，兄弟二人由不同門進入，不同門出來，則：

(1)自己可以由相同門進出時，其方法有____________種．

(2)自己不可以由相同門進出時，其方法有____________種．

解答 (1)400;(2)260

解析 (1)兄先進入方法有 5 種，弟再進入方法有 4 種，

兄出來時方法有 5 種，弟出來時方法有 4 種，

由乘法原理知：進出方法共有 $5\times4\times5\times4=400$ 種．

(2)兄由弟進入時的門出來，其法有 $5\times4\times1\times4=80$ 種，

兄不經由弟進入時的門出來，其法有 $5\times4\times3\times3=180$ 種，

故進出方法有 $80+180=260$ 種．

20.每次用 20 根相同火柴棒圍成一個三角形，共可圍成____________個不全等的三角形．

解答 8

解析 設三角形的三邊長 x，y，z 且 $x\ge y\ge z$，x，y，$z\in\mathbb{N}$，則 $\begin{cases} x+y+z=20 & \cdots\cdots ① \\ y+z>x & \cdots\cdots ② \\ x\ge y\ge z & \cdots\cdots ③ \end{cases}$，

由①得 $20=x+y+z>x+x=2x \quad\Rightarrow\quad 10>x$，

由①，③得 $20=x+y+z\le x+x+x=3x \quad\Rightarrow\quad \frac{20}{3}\le x$，

$\because \quad x\in\mathbb{N} \quad\Rightarrow\quad 7\le x<10 \quad\Rightarrow\quad x=7，8，9$，

當 $x=7$ 時，$y+z=13 \quad\Rightarrow\quad (y，z)=(7，6)$，

當 $x=8$ 時，$y+z=12 \quad\Rightarrow\quad (y，z)=(8，4)，(7，5)，(6，6)$，

當 $x=9$ 時，$y+z=11 \quad\Rightarrow\quad (y，z)=(9，2)，(8，3)，(7，4)，(6，5)$，

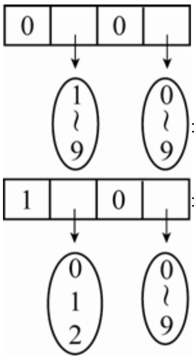
$\therefore$ 不全等的三角形共有 $1+3+4=8$ 種．

21.如果從 1，2，3，4，…，一直寫到 1245 時，一共寫了____________個 0．

解答 344

解析 ①個位數為 0 $\Rightarrow$ 10，20，30，…，1240 共 124 個．

②十位數為 0 $\Rightarrow$

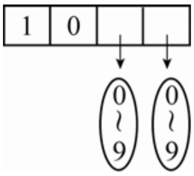


$\Rightarrow 9\times 10=90$

$\Rightarrow 3\times 10=30$

$90+30=120$

③百位數為 0 $\Rightarrow$



$\Rightarrow 10\times 10=100$

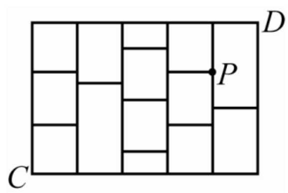
$\therefore$ 所求 $=124+120+100=344$.

22.某公司生產多種款式的「阿民」公仔，各種款式只是球帽、球衣或球鞋顏色不同．其中球帽共有黑、灰、紅、藍四種顏色，球衣有白、綠、藍三種顏色，而球鞋有黑、白、灰三種顏色．公司決定紅色的球帽不搭配灰色的鞋子，而白色的球衣則必須搭配藍色的帽子，至於其他顏色間的搭配就沒有限制．在這些配色的要求之下，最多可有__________種不同款式的「阿民」公仔．

解答　25

解析　若球衣為白色時，最多有$1\times 3=3$種方法，
若球衣為綠色時，最多有$4\times 3-1=11$種方法（扣除紅色球帽配灰色球鞋），
若球衣為藍色時，最多有$4\times 3-1=11$種方法（扣除紅色球帽配灰色球鞋），
故共有$3+11+11=25$種方法．

23.<u>阿銘</u>逛完百貨公司準備回家，街道如圖，百貨公司在 C 點，家在 D 點，但在 P 點有交通事故，於是不經過 P 點，他回家有__________種走法．(他可以走 →、↑、↓ 但走過的路不重複)



解答　300

解析　可求$=4\times 3\times 5(\underbrace{1\times 1}_{\text{從P的上方通過}}+\underbrace{2\times 2}_{\text{從P的下方通過}})=300$.

24.同時擲 3 粒相同的骰子，求點數和為 9 的情形有__________種．

解答　6

解析　(1，2，6)，(1，3，5)，(1，4，4)，(2，2，5)，(2，3，4)，(3，3，3)，共 6 種．