| 高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：105.03.11 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 範圍 | 1-1.2 數列.級數(C) | 班級 | 一年____班 | 姓名 | |
| | | 座號 | | | |

一、填充題(每題 10 分)

1.有一個 7 行 10 列的表，從第 1 列第 1 行的空格開始，由左向右按照順序填入正整數 1，2，3，…，如圖的方式，一直填到第 10 列第 7 行的空格 70 為止，則:

(1)第 4 列第 3 行的數字為____________．

(2)數字 39 填在第幾列第幾行____________．

(3)從第 2 列開始，每一列的數字會比前一列總和共多____________．

| | 第1行 | 第2行 | | | | | 第7行 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 第 1 列 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 第 10 列 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |

解答 (1)24;(2)第 6 列第 4 行;(3)49

解析 (1)每一列有 7 個數，前 3 列共出現 21 個數， ∴第 4 列為 22，23，24，第 3 行為 24．

(2)前 5 列共出現 35 個數， ∴第 6 列開始為 36，37，38，39，∴39 為第 6 列第 4 行．

(3)每一列的每一個數字均比前一列多 7， ∴總和共多 $7\times 7=49$．

2.於 3 和 48 之間插入三個數，使成等比數列，則此三數為____________．

解答 6，12，24 或$-6$，12，$-24$

解析 插入三數，可得首項為 3，第 5 項為 48 之等比數列 $\langle a_n\rangle$，且設其公比為 $r$，

$a_5=3\cdot r^4=48\Rightarrow r^4=16\Rightarrow r=\pm 2$，∴三數為 6，12，24 或$-6$，12，$-24$．

3.有三個正數成等比數列，其和為 21，其倒數和為 $\dfrac{7}{12}$，則此三數由小至大為____________．

解答 3，6，12

解析 設三數為 $a$，$ar$，$ar^2$（$a>0$，$r\geq 1$）

則 $\begin{cases} a+ar+ar^2=21 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{ar}+\dfrac{1}{ar^2}=\dfrac{7}{12} \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a(1+r+r^2)=21\cdots\cdots① \\ \dfrac{1}{ar^2}(1+r+r^2)=\dfrac{7}{12}\cdots\cdots② \end{cases}$

①÷② $\Rightarrow (ar)^2=36$，$\because ar>0$， $\therefore ar=6$，

代入②得 $\dfrac{1}{6r}(1+r+r^2)=\dfrac{7}{12}$，化簡得 $2r^2-5r+2=0$，$\therefore r=\dfrac{1}{2}$ 或 2，

$\because r\geq 1$，∴取 $r=2$ 代入①得 $a=3$，∴三數為 3，6，12．

4.三數成等比遞增數列,和為 19,若將此三數分別加上 1,4,6 後三數成等差數列,則此數列為_____．

解答 4，6，9

解析 設此三數為 $a$，$ar$，$ar^2$（$a>0$，$r\geq 1$）

$$\begin{cases} a+ar+ar^2=19\cdots\cdots① \\ (a+1)+(ar^2+6)=2(ar+4)\cdots\cdots② \end{cases}$$

$\frac{①}{②}\Rightarrow\frac{a(r^2+r+1)}{a(r^2-2r+1)}=\frac{19}{1}$，

交叉相乘，化簡得$(2r-3)(3r-2)=0\Rightarrow r=\frac{3}{2}$或$\frac{2}{3}$（不合），代入①得 $a=4$，

∴三數為 4，6，9．

5.瓶內裝滿酒精，用去$\frac{1}{4}$後用水加滿，第二次又用$\frac{1}{4}$後再用水加滿，連續五次，則最後瓶內之酒精含量為________%．(取近似值至第二位小數)

| 解答 | 23.73 |
|---|---|

| 解析 | 第一次剩$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$， |
|---|---|

第二次剩$\frac{3}{4}(1-\frac{1}{4})=(\frac{3}{4})^2$，⋯，

第五次剩$(\frac{3}{4})^5\fallingdotseq 0.2373=23.73\%$．

6.每月月初存入銀行 10000 元，月息 0.1%，按月複利計算，則十年期滿可領回本利和__________元．（$1.001^{120}$大約 1.127）

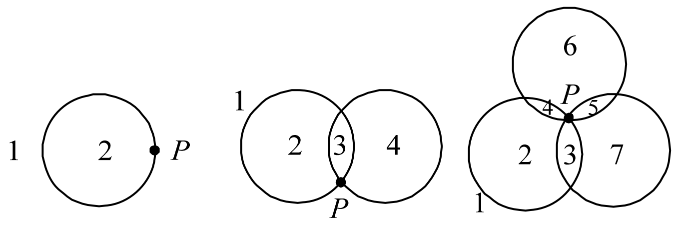
| 解答 | 1271270 |
|---|---|
| 解析 | 十年本利和$=10000(1.001+1.001^2+1.001^3+\cdots+1.001^{120})$ |

$$=10000\cdot\frac{1.001(1.001^{120}-1)}{1.001-1}=10000\cdot\frac{1.001(1.127-1)}{0.001}$$

$$=10000\cdot 1001\cdot 0.127=1271270\ .$$

7.平面上有 10 個圓，均過一點 $P$，則此 10 個圓將平面最多分割成______________個區域．

| 解答 | 56 |
|---|---|
| 解析 | 令 $a_n$ 表 $n$ 個圓最多分割的區域 |




$$\begin{aligned} \cancel{a_1}&=2 \\ \cancel{a_2}&=\cancel{a_1}+2 \\ \cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+3 \\ \cancel{a_4}&=\cancel{a_3}+4 \\ &\vdots \\ +)\quad a_{10}&=\cancel{a_9}+10 \\ \hline a_{10}&=2+2+3+4+\cdots+10 \\ &=1+(1+2+3+\cdots+10) \\ &=1+\frac{10\cdot 11}{2}=56. \end{aligned}$$

8 (1)$n$ 為正整數，$2^{6n-3}+3^{2n-1}$ 恆為自然數 $P$ 的倍數，則 $P$ 的最大值為____________ .

(2)適用數學歸納法 證明上述正確.(10 分)

解答 11

解析 $n=1$ 時，$2^{6n-3}+3^{2n-1}=2^3+3=11$，

$n=2$ 時，$2^{6n-3}+3^{2n-1}=2^9+3^3=539=11\times 49$，

$n=3$ 時，$2^{6n-3}+3^{2n-1}=2^{15}+3^5=33011=11\times 3001$，∴猜測 $P$ 的最大值為 11

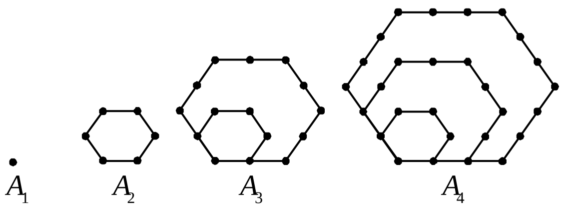
9.設數列〈$a_n$〉的首項 $a_1=2$ 且滿足遞迴關係式：$a_n=3a_{n-1}+2$，$n\ge 2$ 觀察歸納的規則，試推測一般項 $a_n$ 的通式（以 $n$ 表示）____________ .

解答 $a_n=3^n-1$，$n\in\mathbb{N}$

解析 $\begin{cases} a_1=2 \\ a_n=3a_{n-1}+2,\ n\ge 2 \end{cases}\Rightarrow a_1=2=3^1-1$，$a_2=8=3^2-1$，$a_3=26=3^3-1$，$a_4=80=3^4-1$

推測 $a_n=3^n-1$，代入得 $a_{n+1}=3(3^n-1)+2=3^{n+1}-1$ ∴$a_n=3^n-1$，$n\in\mathbb{N}$ .

10.如圖，設圖 $A_n$ 所有點的總數 $a_n$，試找出 $a_{n-1}$ 與 $a_n$ 的關係（其中 $n\ge 2$）____________ .




解答 $a_n=a_{n-1}+4n-3$

解析 $a_1=1$，$a_2=a_1+2\times 4-3$，$a_3=a_2+4\times 3-3$，$a_4=a_3+4\times 4-3$

$\Rightarrow a_n=a_{n-1}+4n-3$，$n\ge 2$ .

11.級數和 $\sum_{n=1}^{3}(2n-1)2^n=$____________ .

解答 54

解析 所求$=(2\times 1-1)2^1+(2\times 2-1)2^2+(2\times 3-1)2^3=54$ .

12.若 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$（$n$ 為正整數)，則 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{24}}=$____________ .

解答 $\dfrac{48}{25}$

解析 $\sum_{n=1}^{24}\dfrac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{24}\dfrac{2}{n(n+1)}=2\sum_{n=1}^{24}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$

$=2[(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4})+\cdots+(\dfrac{1}{24}-\dfrac{1}{25})]=2(1-\dfrac{1}{25})=2\times\dfrac{24}{25}=\dfrac{48}{25}$ .

13.計算 $\sum_{k=1}^{20}2k(k+1)=$____________ .

解答 6160

解析 $\sum_{k=1}^{20}2k(k+1)=\sum_{k=1}^{20}(2k^2+2k)=2\sum_{k=1}^{20}k^2+2\sum_{k=1}^{20}k=2\times\dfrac{20\times 21\times 41}{6}+2\times\dfrac{20\times 21}{2}=5740+420=6160$ .

14.設 $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)(k+3)=a\sum_{k=1}^{n}k^2+b\sum_{k=1}^{n}k+c$，則序組$(a , b , c)=$____________ .

解答 $(2 , 7 , 3n)$

解析 原式$=\sum_{k=1}^{n}(2k^2+7k+3)=2\sum_{k=1}^{n}k^2+7\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3=2\sum_{k=1}^{n}k^2+7\sum_{k=1}^{n}k+3n$，

$a=2$，$b=7$，$c=3n$，$\therefore(a, b, c)=(2, 7, 3n)$．

15.設$\sum_{k=0}^{4}(ak+b)=50, \sum_{k=1}^{5}(ak+b)=70$，則$(a, b)=$_____________．

解答 $(4, 2)$

解析 由第一式 $\Rightarrow b+(a+b)+(2a+b)+(3a+b)+(4a+b)=50 \Rightarrow 10a+5b=50$……①

由第二式 $\Rightarrow (a+b)+(2a+b)+(3a+b)+(4a+b)+(5a+b)=70 \Rightarrow 15a+5b=70$……②

由①②解得 $a=4$，$b=2$．

16.求 $1\times39+3\times37+5\times35+\cdots+37\times3+39\times1=$_____________．

解答 5340

解析 $1\times39+3\times37+5\times35+\cdots+39\times1$

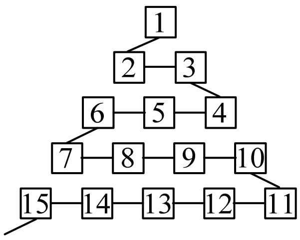
$$=\sum_{k=1}^{20}(2k-1)(41-2k)$$

$$=\sum_{k=1}^{20}(82k-4k^2-41+2k)$$

$$=\sum_{k=1}^{20}(-4k^2+84k-41)=-4\times\frac{20(21)(41)}{6}+84\times\frac{(20)(21)}{2}-41\times20$$

$=-11480+17640-820=5340$．

17.下圖是從事網路工作者經常用來解釋網路運作的蛇形模型：




數字 1 出現在第 1 列；數字 2，3 出現在第 2 列；數字 6，5，4（從左至右）出現在第 3 列；數字 7，8，9，10 出現在第 4 列；依此類推．試問第 99 列，從左至右算，第 67 個數字為_____________．

解答 4884

解析 前 99 列共出現了 $1+2+3+\cdots+99=\frac{99\cdot100}{2}=4950$ 個數，

第 99 列為奇數列，其數字由右向左增大，$\therefore$由左向右第 67 個數字為 $4950-66=4884$．

18.(1)試利用歸納法證明「 $n$ 是自然數，則$\sum_{k=1}^{n}k^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2$ 」

(2)若 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=3025$，$n=$_____________．

解答 (2)10

解析 $[\frac{n(n+1)}{2}]^2=3025=55^2$，$\therefore\frac{n(n+1)}{2}=55$，$n(n+1)=110=10\times11$，故 $n=10$．

19.設 $\langle a_n\rangle$ 是等差數列，且 $a_3=56$，$a_{10}=-7$，

(1)$a_{37}=$_____________．

(2)設這等差數列的前 $n$ 項總和是 $S_n$，當 $S_n$ 有最大值時，$n$ 的值為_____________．

解答 (1) $-250$;(2)9

解析 (1) $a_n=a_1+(n-1)d$，

$a_3 = a_1 + 2d = 56$⋯⋯①

$a_{10} = a_1 + 9d = -7$⋯⋯②

② − ①： $7d = -63$，$d = -9$ 代入①得 $a_1 = 74$，

$a_{37} = a_1 + 36d = (a_1 + 9d) + 27d = -7 + 27 \times (-9) = -250$ .

(2) $a_n = 74 + (n-1)(-9) < 0$，$9n > 83 \Rightarrow n > 9.2$，第 10 項始為負，前 9 項和為最大，$n = 9$ .

20.求 $6^2 + 7^2 + \cdots + 30^2 =$ ____________ .

解答 9400

解析 原式 $= (1^2 + 2^2 + \cdots + 30^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = \dfrac{30 \cdot 31 \cdot 61}{6} - \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} = 9400$ .

21.設等差數列 $\langle a_n \rangle$ 與 $\langle b_n \rangle$ 滿足 $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{2n+3}{6n+4}$，且前 $n$ 項和分別為 $S_n$ 與 $S'_n$，則 $S_{11} : S'_{11} =$ ____________ .

解答 3：8

解析 $S_{11} : S'_{11} = a_6 : b_6 = (2 \times 6 + 3) : (6 \times 6 + 4) = 3 : 8$ .

22.設一等差數列的前 $n$ 項之和為 9，前 $2n$ 項之和為 12，則前 $3n$ 項之和為____________ .

解答 9

解析 等差數列每 $n$ 項一組之和構成另一個等差數列，即 $S_n$，$S_{2n} - S_n$，$S_{3n} - S_{2n}$ 成等差，

$\therefore S_n = 9$，$S_{2n} - S_n = 12 - 9 = 3$ 及 $S_{3n} - S_{2n}$ 成等差數列，公差$= 3 - 9 = -6$，

$\therefore S_{3n} - S_{2n} = 3 + (-6) = -3$，$\therefore S_{3n} = S_{2n} + (-3) = 12 - 3 = 9$ .

23.求 $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \cdots + 99 \cdot 100 =$ ____________ .

解答 169150

解析 原式$= \displaystyle\sum_{k=1}^{50} (2k-1) \cdot 2k = 4\sum_{k=1}^{50} k^2 - 2\sum_{k=1}^{50} k = 4 \cdot \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} - 2 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} = 171700 - 2550 = 169150$ .

24.設一數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式滿足 $a_1 = 1$ 且 $a_{n+1} = a_n + (-1)^n \times n^2$，$n$ 為正整數，求 $a_9 =$__________.

解答 37

解析

$$a_2 = a_1 + (-1)(1^2) = a_1 - 1^2$$
$$a_3 = a_2 + (-1)^2(2^2) = a_2 + 2^2$$
$$a_4 = a_3 + (-1)^3(3^2) = a_3 - 3^2$$
$$\vdots$$
$$+)\ a_9 = a_8 + (-1)^8(8^2) = a_8 + 8^2$$

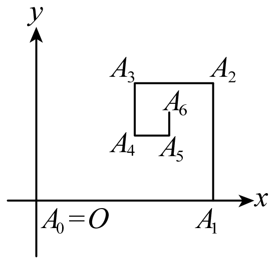
$$a_9 = a_1 - 1^2 + 2^2 - 3^2 + \cdots + 8^2 = (2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2) - (3^2 + 5^2 + 7^2) = 37$$ .

25.兩等差數列前 $n$ 項和之比為$(2n+3) : (3n+2)$，則此兩數列第 11 項之比為____________ .

解答 9：13

解析 $a_{11} : b_{11} = S_{21} : S'_{21} = (2 \times 21 + 3) : (3 \times 21 + 2) = 9 : 13$ .

26.如圖中各線段均為水平或鉛直線段，$\overline{A_0A_1} = 1$，且 $\overline{A_nA_{n+1}} = \dfrac{2}{3}\overline{A_{n-1}A_n}$，則點 $A_6$ 的坐標為__________ .




解答 $(\frac{61}{81},\frac{122}{243})$

解析 $\overline{A_1A_2}=\frac{2}{3}\overline{A_0A_1}=\frac{2}{3}$，$\overline{A_2A_3}=\frac{2}{3}\overline{A_1A_2}=(\frac{2}{3})^2$，…，令$A_6(x_6,y_6)$，則

$x_6=1-(\frac{2}{3})^2+(\frac{2}{3})^4=\frac{61}{81}$， $y_6=\frac{2}{3}-(\frac{2}{3})^3+(\frac{2}{3})^5=\frac{122}{243}$，即 $A_6$ 的坐標為 $(\frac{61}{81},\frac{122}{243})$ ．

27.若 $1\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+10\times 2^{10}=9a+2$，則 $a=$____________．

解答 $2^{11}$

解析

$$\begin{array}{rcccccccccccl} & 1\cdot 2 & + & 2\cdot 2^2 & + & 3\cdot 2^3 & + & \cdots & + & 10\cdot 2^{10} & & & = & 9a+2 \\ -) & & & 1\cdot 2^2 & + & 2\cdot 2^3 & + & \cdots & + & 9\cdot 2^{10} & + & 10\cdot 2^{11} & = & 18a+4 \\ \hline & 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \cdots & + & 2^{10} & - & 10\cdot 2^{11} & = & -9a-2 \end{array}$$

$\Rightarrow 9a+2=10\cdot 2^{11}-\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=9\cdot 2^{11}+2 \Rightarrow a=2^{11}$ ．

28.某家銀行的年利率為 2%，於每年年底採複利計息一次．小明在第一年年初存入 10000 元，之後每隔兩年（即第三年，第五年，…，以此類推）的年初皆存入 10000 元，直到第九年年底結算後把所有的錢領出來，根據下表，小明將會領出____________元．（元以下四捨五入）

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(1.02)^n$ | 1.02 | 1.0404 | 1.06121 | 1.08243 | 1.10407 | 1.12616 | 1.14867 | 1.17166 | 1.19509 | 1.21899 | 1.24337 |

解答 55290

解析 $10000(1+2\%)^9+10000(1+2\%)^7+10000(1+2\%)^5+\cdots+10000(1+2\%)^1$

$=10000(1.02+1.02^3+1.02^5+\cdots+1.02^9)$

$=10000\times\frac{1.02\times(1.02^{10}-1)}{1.02^2-1}=10000\times\frac{(1.24337-1.02)}{0.0404}=55289.6 \fallingdotseq 55290$ ．

29.$\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+2}+\frac{1}{3^2+3}+\cdots+\frac{1}{99^2+99}=$____________．

解答 $\frac{99}{100}$

解析 $\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+2}+\frac{1}{3^2+3}+\cdots+\frac{1}{99^2+99}$

$=\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{k^2+k}=\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{99}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{99}-\frac{1}{100})=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$ ．

30.$\sum_{k=1}^{10}k(k+1)=$____________．

解答 440

解析 $\sum_{k=1}^{10} k(k+1)=\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k=\frac{10\times 11\times 21}{6}+\frac{10\times 11}{2}=440$ .

31.級數 $\sum_{k=1}^{10}(3k^2+3k+5)=$ ____________ .

解答 1370

解析 $\sum_{k=1}^{10}(3k^2+3k+5)=3\times\frac{10\times 11\times 21}{6}+3\times\frac{10\times 11}{2}+5\times 10=1370$ .