高雄市明誠中學 高一數學平時測驗					日期：105.03.03
範圍	1-1.2 數列.級數(B)	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1.一個數列 $\langle \frac{k^2+2}{2k-1} \rangle$ 的第五項為____________ .

解答 3

解析 令 $k=5$ 代入 $\frac{k^2+2}{2k-1}$ 得 $\frac{27}{9}=3$.

2.將自然數按下列規律排列，每一列比前一列多一個數，如下所示：

第一列　1

第二列　2，3

第三列　4，5，6

第四列　7，8，9，10

……以此類推……

求自然數 58 位於第(1)____________列的第(2)____________數 .

解答 (1)11;(2)3

解析 設 58 位在第 n 列，$1+2+3+\cdots+n \ge 58 \Rightarrow n=11$，$\therefore$58 在第 11 列，

$\because 1+2+\cdots+10=55$. 故 58 在第 11 列第 3 個數 .

3.一等差數列之第 5 項是 31，第 12 項是 73，則第 15 項為____________ .

解答 91

解析 設此數為 $\langle a_n \rangle$，公差為 d，

$a_n=a_1+(n-1)d$，

$a_5=a_1+4d=31$……①

$a_{12}=a_1+11d=73$……②

②－①：$7d=42 \Rightarrow d=6$ 代入①得 $a_1=7$，$\therefore a_{15}=7+14\times 6=91$.

4.1 到 100 之間，是 3 的倍數或 5 的倍數有____________個 .

解答 46

解析 3 的倍數有 3×1，3×2，…，3×33，共 33 項，(1~100 之間不含 100)

5 的倍數有 5×1，5×2，…，5×19，共 19 項，

15 的倍數有 15×1，15×2，…，15×6，共 6 項，$\therefore$3 或 5 的倍數共有 $33+19-6=46$ 個 .

5.在 3 與 33 之間插入五個數，使成等差數列，則此五數為____________ .

解答 8，13，18，23，28

解析 設此數為 $\langle a_n \rangle$，公差為 d，$a_n=a_1+(n-1)d$，

$a_7=3+(7-1)d=33 \Rightarrow d=5$，此五數為 8，13，18，23，28 .

6.$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ 與 $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ 的等差中項為____________ .

解答 $\frac{5}{2}$

解析 $\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}})=\frac{1}{2}\times\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}=\frac{5}{2}$.

7.若直角三角形之三邊長成等差數列，則三邊長之比為____________．（由小至大）

解答　3：4：5

解析　設三邊長為 $a-d$，a，$a+d$，（a，$d>0$），則$(a+d)^2=a^2+(a-d)^2$，
化簡得 $a^2-4ad=0 \Rightarrow a\,(a-4d)=0 \Rightarrow a=4d$ 或 0（0 不合），
$\therefore$三邊比為 $3d$：$4d$：$5d=3$：4：5．

8.設 a，b，c 均為整數，$1\le a$，b，$c\le 9$，已知 a，b，c 成等差數列，且 $0.\overline{a}+0.\overline{4b}=1.\overline{2c}$，則序組$(a , b , c)$=____________．

解答　(7 , 5 , 3)

解析　原式$\Rightarrow \dfrac{a}{9}+\dfrac{40+b}{99}=1+\dfrac{20+c}{99}$

$\Rightarrow 11a+(40+b)=99+20+c \quad \Rightarrow 11a+b-c=79\cdots\cdots$①

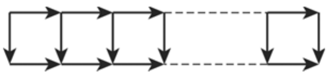
又 a，b，c 成等差數列，$\therefore a+c=2b$，代入①式消去 c 得 $b=12a-79$，$\therefore$取 $a=7 \Rightarrow b=5$，$c=3$．

9.在 1 和 100 之間放入 a_2，a_3，a_4，$\cdots$，a_8，a_9 等 8 個數，使 1，a_2，a_3，a_4，$\cdots$，a_8，a_9，100 成等差數列，則 $a_5=$____________．

解答　45

解析　$100=1+(10-1)d$，$d=11$，$a_5=1+(5-1)\times 11=45$．

10.以 49 根火柴棒圍成如下圖的 n 個正方形，則 $n=$____________．



解答　16

解析　$a_1=4$，$d=3$，$a_n=a_1+(n-1)d=4+3(n-1)=49$，$\therefore n=16$．

11.有一等比數列，第 2 項是 6，第 5 項是 48，則第 10 項為____________．

解答　1536

解析　$a_n=a_1r^{n-1}$，

$a_2=a_1r=6\cdots\cdots$①

$a_5=a_1r^4=48\cdots\cdots$②

$\dfrac{②}{①}$：$r^3=8 \Rightarrow r=2$，$a_{10}=a_1r^9=(a_1r^4)r^5=48\times 2^5=1536$．

12.實數等比數列 $\langle 6 , \cdots , 768 , \cdots , 12288\rangle$ 中的 768 是第 n 項, 12288 是第 $2n-4$ 項, 則公比 $r=$____________．

解答　2

解析　$6r^{n-1}=768 \Rightarrow r^{n-1}=2^7\cdots\cdots$①

$6r^{2n-5}=12288 \Rightarrow r^{2n-5}=2^{11}\cdots\cdots$②

②÷① $\Rightarrow r^{n-4}=2^4\cdots\cdots$③

①÷③ $\Rightarrow r^3=2^3$，又 r 為實數，$\therefore r=2$．

13.於 160 和 5 之間插入四個數，使成等比數列，則此四數為____________．

解答　80，40，20，10

解析　設此數列為 $\langle a_n\rangle$，公比為 r，$a_n=a_1r^{n-1}$，

$a_6=160r^5=5 \Rightarrow r=\dfrac{1}{2}$，四數為 80，40，20，10．

14.設四正數 a，b，c，d 成等比數列，若 $a+b=8$，$c+d=72$，則公比 $r=$____________．

解答　3

解析　設公比為 r，則 $b=ar$，$c=ar^2$，$d=ar^3$（$r>0$），

代入 $a+b=8$，$c+d=72$，得 $a+ar=8$……①

$ar^2+ar^3=72$……②

②÷① $\Rightarrow r^2=9$，又 $r>0$，$\therefore r=3$．

15.有一等比數列共有 10 項，已知奇數項的和為 20，偶數項的和為 60，則此等比數列的公比為＿＿＿＿＿＿．

解答　3

解析　設此等比數列 $\langle a_n\rangle$ 的公比為 r，則

$$\begin{cases} a_1+a_1r^2+a_1r^4+a_1r^6+a_1r^8=20\cdots\cdots① \\ a_1r+a_1r^3+a_1r^5+a_1r^7+a_1r^9=60\cdots\cdots② \end{cases}$$

②÷①得 $r=3$．

16.有三個數成等比數列，其和為 93，若第一項減 11，第三項加 2，則成等差數列，求這三數由小到大排列為＿＿＿．

解答　16，28，49

解析　設此三數為 $a-d+11$，a，$a+d-2$（$d>0$）

則 $a-d+11+a+a+d-2=3a+9=93\Rightarrow 3a=84\Rightarrow a=28$，

$\therefore$此三數為 $39-d$，28，$26+d$（成等比數列）

$\Rightarrow 28^2=(39-d)(26+d)\Rightarrow 784=1014+13d-d^2$

$\Rightarrow d^2-13d-230=0\Rightarrow(d-23)(d+10)=0\Rightarrow d=23$ 或 -10（不合），$\therefore$此三數為 16，28，49．

17.三數成等比遞增數列，和為 19，若將此三數分別加上 1，4，6 後三數成等差數列，則此數列為＿＿＿＿＿＿．

解答　4，6，9

解析　設此三數為 a，ar，ar^2（$a>0$，$r\geq 1$）

$$\begin{cases} a+ar+ar^2=19\cdots\cdots① \\ (a+1)+(ar^2+6)=2(ar+4)\cdots\cdots② \end{cases}$$

$$\frac{①}{②}\Rightarrow\frac{a(r^2+r+1)}{a(r^2-2r+1)}=\frac{19}{1},$$

交叉相乘，化簡得$(2r-3)(3r-2)=0\Rightarrow r=\dfrac{3}{2}$或$\dfrac{2}{3}$（不合），代入①得 $a=4$，$\therefore$三數為 4，6，9．

18.18 年前，珊珊出生時，媽媽為他在銀行存入 1 萬元當作教育基金．如果年利率為 6%，每年依複利計息一次，那麼現在珊珊的教育基金有＿＿＿＿＿＿元．（已知$(1.06)^{17}\fallingdotseq 2.6928$，$(1.06)^{18}\fallingdotseq 2.8543$，$(1.06)^{19}\fallingdotseq 3.0256$）

解答　28543

解析　$10000(1+6\%)^{18}=10000\times 2.8543=28543$（元）．

19.若相異的三數 $a-b$，$b-c$，$c-a$ 成等比，則公比=＿＿＿＿＿＿．

解答　$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

解析　$a-b$，$b-c$，$c-a$ 成等比，設公比為 r

令 $k=a-b$，$kr=b-c$，$kr^2=c-a$

則 $k+kr+kr^2=(a-b)+(b-c)+(c-a)=0\Rightarrow k(1+r+r^2)=0$

$\because k\neq 0$　$\therefore 1+r+r^2=0\Rightarrow r=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$．

20.數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1=1$ 且 $a_n=a_{n-1}+2$，$n\geq 2$，求一般式 $a_n=$____________ .

解答　$2n-1$

解析　$a_n-a_{n-1}=2$，$n\geq 2$ 故 $\langle a_n\rangle$ 首項 1，公差 2 等差數列，故 $a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\times 2=2n-1$.

21.數列 $\langle a_n\rangle$ 中，若 $a_1=\dfrac{1}{2}$ 且 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$，n 為正整數，由此可推得 $a_{100}=$____________ .

解答　$\dfrac{100}{101}$

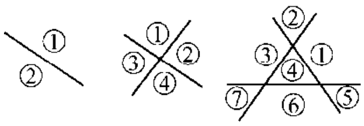
解析　$\because a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$，$\therefore a_2=\dfrac{1}{2-a_1}=\dfrac{1}{2-\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$，$a_3=\dfrac{1}{2-a_2}=\dfrac{1}{2-\frac{2}{3}}=\dfrac{3}{4}$，由此可推得 $a_{100}=\dfrac{100}{101}$.

22.平面上，12 條相異直線最多可將平面分割成____________個區域 .

解答　79

解析　$a_1=2$，$a_2=a_1+2=2+2$，$a_3=a_2+3=2+2+3$，$\cdots$，（作圖尋求規律）

$a_{12}=a_{11}+12=2+2+3+\cdots+12=1+\dfrac{12\times 13}{2}=79$.



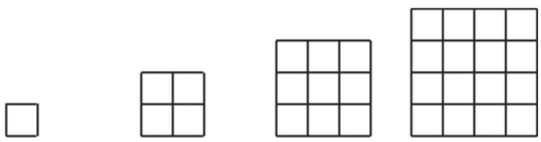
23.有一遞迴數列〈 a_n 〉定義如下：$\begin{cases} a_1=3 \\ a_{n+1}=a_n-2 \quad (n\geq 2) \end{cases}$，求 $a_{36}=$____________ .

解答　-67

解析　$a_{n+1}=a_n-2\Rightarrow a_{n+1}-a_n=-2$

表示〈 a_n 〉為首項 $a_1=3$，公差 $d=-2$ 之等差數列，$\therefore a_{36}=3+(36-1)(-2)=-67$.

24.利用等長的牙籤圍成正方形的方格，以 a_n 表示圍成 $n\times n$ 方格所用的牙籤數，$n=1$，2，3，4 的情形如下圖，求 $a_n=$____________ .



$a_1=4$　　$a_2=12$　　$a_3=24$　　$a_4=40$

解答　$2n^2+2n$

解析　$a_1=2\times(1\times 2)=4$

$a_2=2\times(2\times 3)=12$

$a_3=2\times(3\times 4)=24$

$a_4=2\times(4\times 5)=40$

$\vdots$

$a_n=2\times[n\times(n+1)]=2n^2+2n$.

25.設 P 為質數，n 為自然數，$f(n)=3^{2n+1}+2^{n+2}$ 對一切自然數 n 使得 $f(n)$為 P 的倍數，則 P 的最大值為_______ .

解答　7

解析　$f(1)=3^3+2^3=35=5\times 7$，

$f(2)=3^5+2^4=259=7\times 37$，

$f(3)=3^7+2^5=2219=317\times 7$，

$\therefore P$ 的最大值為 7，經歸納法證明猜測是正確的 .

26.下面對於「試利用數學歸納法證明對所有正整數 n，$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ 恆成立」的作法是否正確?

(1)當 $n=1$ 時，左式$=\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$，右式$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$，　因左式=右式，故當 $n=1$ 時原式成立．

(2)假設當 $n=k$ 時成立，即$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{k\times(k+1)}=\frac{k}{k+1}$，

則當 $n=k+1$ 時，左式$=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{(k+1)\times(k+2)}$

$$=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2})=1-\frac{1}{k+2}=\frac{k+1}{k+2}=\text{右式，}$$

所以根據數學歸納法，原式對所有的正整數 n 都成立．

以上敘述是否正確? ＿＿＿＿＿＿＿．

解答　否

解析　否，$\because n=k+1$ 在驗證時未利用 $n=k$ 時已對的條件．

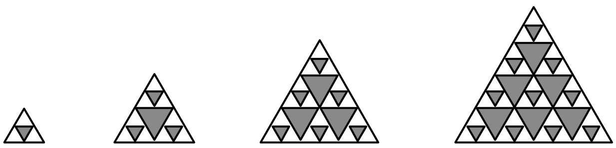
27.設 a 為正整數，且 $1\le a\le 8$，若不論 n 為任何正整數，$a\times13^n-2^{2n+1}$ 都是 9 的倍數，求 $a=$＿＿＿＿＿＿＿．

解答　2

解析　$n=1$，$a\times13-2^3=13a-8\Rightarrow a=2$，

$n=2$，$a\times13^2-2^5=169a-32\Rightarrow a=2$，$\therefore a=2$．

28.用黑、白兩種顏色的三角形地磚，依照如下的規律拼成若干圖形，設第 n 個圖形需用到 a_n 塊白色地磚，試求 $a_{20}=$＿＿＿．



解答　630

解析　$a_1=3\times1$

$a_2=3\times3=3\times(1+2)$

$a_3=3\times(1+2+3)$

$a_4=3\times(1+2+3+4)$

$\vdots$

$a_{20}=3\times(1+2+\cdots+20)=3\times\frac{(1+20)20}{2}=630$．

29.設數列〈a_n〉滿足 $a_1=1$，$a_n=5a_{n-1}+8$（$n=2$，3，…），則 $a_n=$＿＿＿＿＿＿＿．

解答　$3\times5^{n-1}-2$

解析　$a_n-k=5(a_{n-1}-k)\Rightarrow a_n=5a_{n-1}-4k$，

$\therefore -4k=8\Rightarrow k=-2$ 代入 $\Rightarrow a_n+2=(a_1+2)\times5^{n-1}$　故 $a_n=3\times5^{n-1}-2$．

30.設數列 a_n 滿足 $a_1=2$，$a_{n+1}-a_n=6n^2-2n$（$n=1,2,3,4,\cdots$），當 $n\ge2$ 時，試用 n 來表示 $a_n-a_1=$＿＿＿．

解答　$2n(n-1)^2$

解析

$$
\begin{array}{rcccccl}
 & a_2 & - & a_1 & & & = 6\times 1^2 - 2\times 1 \\
 & a_3 & - & a_2 & = & 6 & \times\ 2^2 - 2\times 2 \\
 & a_4 & - & a_3 & = & 6 & \times\ 3^2 - 2\times 3 \\
 & & & & \vdots & & \\
+) & a_n & - & a_{n-1} & = & 6 & \times\ (n-1)^2 - 2\times(n-1) \\
\hline
 & a_n & - & a_1 & = & 6 & \times\ [1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2] - 2\times[1+2+3+\cdots+(n-1)]
\end{array}
$$

$$
= 6\times\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} - 2\times\frac{n(n-1)}{2} = (n-1)(n)(2n-1) - n(n-1)
$$

$$
= n(n-1)(2n-1-1) = 2n(n-1)^2 \ .
$$