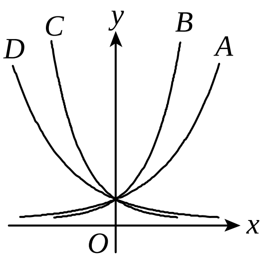
高雄市明誠中學 高一數學平時測驗					日期：104.12.10.
範圍	3-2 指數函數	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

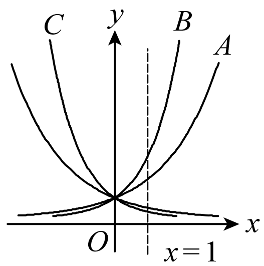
1.如圖 A，B，C，D 分別為指數函數 $y=a^x$，$y=b^x$，$y=c^x$，$y=d^x$ 的圖形，
試比較 a，b，c，d 的大小關係為____________ .



解答 $b>a>d>c$

解析 作 $x=1$ 的直線與圖的交點

由上而下分別為$(1,b)$，$(1,a)$，$(1,d)$，$(1,c)$ $\therefore b>a>d>c$.



2.已知$(\frac{1}{4})^{x^2-\frac{5}{2}x}>0.125$，求 x 之範圍為____________ .

解答 $-\frac{1}{2}<x<3$

解析 $\because (\frac{1}{4})^{x^2-\frac{5}{2}x}>\frac{1}{8}\Rightarrow (\frac{1}{2})^{2x^2-5x}>(\frac{1}{2})^3$

$\therefore 2x^2-5x<3\Rightarrow 2x^2-5x-3<0\Rightarrow (x-3)(2x+1)<0\Rightarrow -\frac{1}{2}<x<3$.

3.已知$(2^x-2)(2^x-8)>0$，求 x 之範圍為____________ .

解答 $x>3$ 或 $x<1$

解析 $\because (2^x-2)(2^x-8)>0$，

$\therefore 2^x>8$ 或 $2^x<2\Rightarrow x>3$ 或 $x<1$.

4.求二函數 $y=4^x$ 與 $y=2^{3x+2}$ 的圖形交點坐標為____________ .

解答 $(-2,\frac{1}{16})$

解析 $\begin{cases} y=4^x\cdots(1) \\ y=2^{3x+2}\cdots(2) \end{cases}$，$\therefore 4^x=2^{3x+2}\Rightarrow 2^{2x}=2^{3x+2}$

$\therefore 2x=3x+2\Rightarrow x=-2$，$y=\frac{1}{16}$，故交點$(-2,\frac{1}{16})$.

5.已知$\frac{1}{9}<(\frac{1}{3})^{2x+1}<9$，求 x 之範圍為____________．

解答 $-\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}$

解析 $\because \frac{1}{9}<(\frac{1}{3})^{2x+1}<9$，

$\therefore 3^{-2}<3^{-2x-1}<3^2 \Rightarrow -2<-2x-1<2 \Rightarrow -1<-2x<3 \Rightarrow -\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}$ ．

6.設 $a=\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$， $b=\sqrt[3]{\sqrt[4]{64}}$， $c=10000^{-0.75}$，$d=16^{0.25}$，則 a，b，c，d 的大小關係為____________．

解答 $d>b>a>c$

解析 $a=\sqrt[5]{\frac{1}{32}}=\sqrt[5]{2^{-5}}=2^{-1}$,

$b=\sqrt[3]{\sqrt[4]{64}}=(2^6)^{\frac{1}{12}}=2^{\frac{1}{2}}$,

$c=10000^{-0.75}=(10^4)^{-\frac{3}{4}}=10^{-3}$,

$d=16^{0.25}=(2^4)^{0.25}=2^1$

$\Rightarrow 2^1>2^{\frac{1}{2}}>2^{-1}>10^{-3}$，$\therefore d>b>a>c$．

7.設 $A=\sqrt[3]{a^2}$， $B=\sqrt[4]{a^3}$， $C=\sqrt[5]{a^4}$

(1)若 $a>1$，則 A，B，C 三數的大小關係為____________．

(2)若 $0<a<1$，則 A，B，C 三數的大小關係為____________．

解答 (1)$A<B<C$;(2)$A>B>C$

解析 $A=\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$， $B=\sqrt[4]{a^3}=a^{\frac{3}{4}}$， $C=\sqrt[5]{a^4}=a^{\frac{4}{5}}$

(1)當 $a>1$ 時 $\because \frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$，$\therefore a^{\frac{2}{3}}<a^{\frac{3}{4}}<a^{\frac{4}{5}}$，$\Rightarrow A<B<C$．

(2)當 $0<a<1$ 時 $\because \frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$，$\therefore a^{\frac{2}{3}}>a^{\frac{3}{4}}>a^{\frac{4}{5}}$，$\therefore A>B>C$．

8.解下列各方程式(1) $3^{x^2}=3^{2x}$ ____________． (2)$4^x-3\cdot 2^x+2=0$____________．

解答 (1) 0 或 2 ;(2) 0 或1

解析 (1)$\because 3^{x^2}=3^{2x}$，$\therefore x^2=2x \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow x=0$ 或 $x=2$．

(2)令 $t=2^x$，原式 $\Rightarrow t^2-3t+2=0 \Rightarrow (t-1)(t-2)=0 \Rightarrow t=1$ 或 $t=2$

即 $2^x=1$ 或 $2^x=2$，$\therefore x=0$ 或 $x=1$．

9.解方程式 $2^{2x+1}+2^{3x}=5\cdot 2^{x+4}$____________．

解答 3

解析 $2^{2x+1}+2^{3x}=5\cdot 2^{x+4} \Rightarrow 2^{2x}\cdot 2^1+2^{3x}=5\cdot 2^x\cdot 2^4$

令 $t=2^x$，原式 $\Rightarrow 2t^2+t^3=80t \Rightarrow t^3+2t^2-80t=0 \Rightarrow t(t-8)(t+10)=0$

$\because t \neq 0$ 且 $t+10 \neq 0$，$\therefore t-8=0 \Rightarrow t=8$，即 $2^x=8 \Rightarrow x=3$．

10.設 $-2 \leq x \leq 3$，$f(x)=2^{2x+1}-2^{x+3}+9$ 的最大值為 M，最小值為 m，則 $M+m=$____________．

解答 74

解析 $-2 \leq x \leq 3$，$2^{-2} \leq 2^x \leq 2^3 \Rightarrow \dfrac{1}{4} \leq 2^x \leq 8$，令 $2^x=t$

$f(x)=2 \times (2^x)^2-8 \times 2^x+9=2t^2-8t+9=2(t-2)^2+1$

當 $t=2$ 時，有最小值 $1=m$

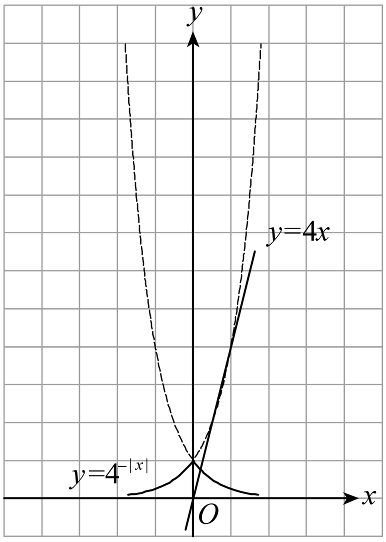
$t=8$ 時，有最大值 $73=M$

$\Rightarrow M+m=73+1=74$．

11.方程式 $4^{-|x|}=4x$ 有____________個實根．

解答 1

解析 將函數 $y=4^{-|x|}$ 與 $y=4x$ 的圖形畫出即可．



因此方程式 $4^{-|x|}=4x$ 有 1 個實根．

12.解 $15^x-5 \cdot 3^x-9 \cdot 5^x+45=0$____________．

解答 2 或 1

解析 令 $a=3^x$，$b=5^x$

原式 $\Rightarrow ab-5a-9b+45=0 \Rightarrow (a-9)(b-5)=0 \Rightarrow a=9$ 或 $b=5$

即 $3^x=9$ 或 $5^x=5$，得 $x=2$ 或 $x=1$．

13.解不等式 $9^x+3^x>12$，得 x 之範圍為____________．

解答 $x>1$

解析 設 $t=3^x$，

原式 $\Rightarrow t^2+t>12 \Rightarrow t^2+t-12>0 \Rightarrow (t+4)(t-3)>0 \Rightarrow t>3$ 或 $t<-4$，

即 $3^x>3$ 或 $3^x<-4$（不合），$\therefore x>1$．

14.設 $f(x)=(4^x+4^{-x})+(2^x+2^{-x})+5$，$x$ 為實數，令 $t=2^x+2^{-x}$，求

(1)$f(x)=$____________（以 t 表示）

(2)$f(x)$的最小值為____________．

解答 (1)t^2+t+3;(2)9

解析 (1)令 $t=2^x+2^{-x}$（$t \geq 2$）$\Rightarrow t^2=4^x+4^{-x}+2$

$\therefore 4^x+4^{-x}=t^2-2$

原式 $\Rightarrow f(x)=(t^2-2)+t+5=t^2+t+3$．

(2) $f(x)=t^2+t+3=(t+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}$

$\because t\ge 2$　$\therefore f(x)$之最小值為$(2+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}=9$．

15.若 x 為任意實數，則函數 $f(x)=(\frac{1}{3})^{x^2-x+\frac{7}{4}}$的最大值為____________．

解答　$\frac{\sqrt{3}}{9}$

解析　由於 $x^2-x+\frac{7}{4}=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}$　　當 $x=\frac{1}{2}$時，有最小值$\frac{3}{2}$

由於底數$\frac{1}{3}<1$，故 $f(x)=(\frac{1}{3})^{x^2-x+\frac{7}{4}}\le(\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}}$　故最大值為$(\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{1}{27}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$．

16.已知$\begin{cases}x-2y=1\\3^x-3^y=2\end{cases}$，則(1)$x=$____________，(2)$y=$____________．

解答　(1)$x=1$;(2)$y=0$

解析　$\begin{cases}x-2y=1\cdots(1)\\3^x-3^y=2\cdots(2)\end{cases}$

由(1)$x=1+2y$ 代入(2)得 $3^{1+2y}-3^y=2\Rightarrow 3^{2y}\cdot 3^1-3^y-2=0$

令 $t=3^y$，原式$\Rightarrow 3t^2-t-2=0\Rightarrow(3t+2)(t-1)=0$

$\because 3t+2\ne 0$，$\therefore t-1=0\Rightarrow t=1$，即 $3^y=1\Rightarrow y=0$，$x=1$．

17.設方程式 $9^x-5\cdot 3^{x+1}+9=0$ 的二根為 α，β，求 $\alpha+\beta=$____________．

解答　2

解析　原式$\Rightarrow(3^x)^2-5\cdot 3^x\cdot 3^1+9=0$

由根與係數關係得 $3^\alpha\cdot 3^\beta=9\Rightarrow 3^{\alpha+\beta}=3^2$　$\therefore \alpha+\beta=2$．

18.方程式 $3(9^x+9^{-x})-10(3^x+3^{-x})+14=0$

(1)令 $t=3^x+3^{-x}$，則原方程式表成 t 的方程式為____________．

(2)x 的解為____________．

解答　(1)$3t^2-10t+8=0$;(2) 0

解析　(1)令 $t=3^x+3^{-x}$（$t\ge 2$），則 $9^x+9^{-x}=t^2-2$

原式$\Rightarrow 3(t^2-2)-10t+14=0\Rightarrow 3t^2-10t+8=0$．

(2)由(1)$(3t-4)(t-2)=0\Rightarrow t=2$ 或$t=\frac{4}{3}$（不合），即 $3^x+3^{-x}=2\Rightarrow x=0$．

19.已知 x 為實數，若$(\frac{\pi}{3})^{2-x}<(\frac{\pi}{3})^{x-4}$，求 x 的範圍____________．

解答　$x>3$

解析　$\because\frac{\pi}{3}>1$，且$(\frac{\pi}{3})^{2-x}<(\frac{\pi}{3})^{x-4}\Rightarrow 2-x<x-4$，$\therefore x>3$．

$\Rightarrow 3x^2+4x-4>0\Rightarrow(x+2)(3x-2)>0\therefore x>\frac{2}{3}$ 或 $x<-2$．

20.解不等式$(\frac{1}{2})^{2x}-\frac{5}{4}\times 2^{-x}+\frac{1}{4}<0$____________．

解答　$2>x>0$

解析 原式$\Rightarrow (\frac{1}{2})^{2x}-\frac{5}{4}\times(\frac{1}{2})^{x}+\frac{1}{4}<0$

令 $t=(\frac{1}{2})^{x}$，原式 $\Rightarrow 4t^2-5t+1<0\Rightarrow(4t-1)(t-1)<0$

$\Rightarrow \frac{1}{4}<t<1$，即 $\frac{1}{4}<(\frac{1}{2})^{x}<1\Rightarrow(\frac{1}{2})^{2}<(\frac{1}{2})^{x}<(\frac{1}{2})^{0}$，$\therefore 2>x>0$.

21.解不等式 $(\frac{1}{10})^{x^2-3x-1}>\frac{1}{100}\times10^{x}$ 得 x 的範圍為＿＿＿＿＿＿ .

解答 $-1<x<3$

解析 $10^{-(x^2-3x-1)}>10^{-2}\times10^{x}\Rightarrow -x^2+3x+1>-2+x\Rightarrow x^2-2x-3<0\Rightarrow -1<x<3$.

22.若方程式 $3\times9^{x}-2k\times3^{x}-k+6=0$ 有兩相異實根，則 k 的範圍為＿＿＿＿＿＿ .

解答 $3<k<6$

解析 設 α，β 為方程式 $3\cdot9^{x}-2k\times3^{x}-k+6=0$ 的相異兩實根，
則 3^{α}，3^{β} 為 $3t^2-2kt+(-k+6)=0$ 的兩根，且 3^{α}，3^{β} 為相異正實數 .

故兩根和 $3^{\alpha}+3^{\beta}=\frac{2k}{3}>0$；兩根積 $3^{\alpha}\times3^{\beta}=\frac{-k+6}{3}>0\Rightarrow k>0$；$k<6$

又判別式 $D=(-2k)^2-4\times3\times(-k+6)>0\Rightarrow k^2+3k-18>0\Rightarrow k>3$ 或 $k<-6$

綜合上述條件可得 $3<k<6$.