高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：104.11.25.					
範圍	3-1 指數	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1.於某項新試驗中，細菌數一日後增加 k 倍且已知 3 日後的細菌數為 300000，$5\frac{1}{2}$ 日後的細菌數 9600000．(1)求 $k=$__________．(2)又細菌數為 4800000 需 x 日後，求 $x=$__________．

解答　(1)3;(2)5

解析　(1)設原有 N_0 隻細菌，$N_0\cdot(k+1)^3=300000\ldots$①

$$N_0\cdot(k+1)^{\frac{11}{2}}=9600000\ldots②$$

$$\frac{②}{①}\Rightarrow(k+1)^{\frac{5}{2}}=32=2^5=4^{\frac{5}{2}}\Rightarrow k+1=4，\therefore k=3．$$

(2) $N_0(3+1)^3=300000\ldots$③

$N_0(3+1)^x=4800000\ldots$④

$$\frac{④}{③}\Rightarrow\frac{4^x}{4^3}=\frac{4800000}{300000}\Rightarrow 4^x=4^5，\therefore x=5．$$

2.$6^x\times8^y\times9^z=2^8\times3^7$，且 x，y，z 均為正整數，求 $x+y+z=$__________．

解答　7

解析　原式 $\Rightarrow(2\times3)^x\times(2^3)^y\times(3^2)^z=2^x\times3^x\times2^{3y}\times3^{2z}=2^{x+3y}\times3^{x+2z}=2^8\times3^7$

$$\therefore\begin{cases}x+3y=8\cdots(1)\\x+2z=7\cdots(2)\end{cases}$$

由$(1)-(2)$得 $3y-2z=1$　取 $y=1$，$z=1$，代入(1)$x=5$，$\therefore x+y+z=7$．

3.設 x，y，z 皆為實數，已知 $2^x=5^y=1000^z$，試求 $\frac{z}{x}+\frac{z}{y}$ 之值為__________．

解答　$\frac{1}{3}$

解析　$2^x=1000^z\Rightarrow2=1000^{\frac{z}{x}}\cdots\cdots$①

$5^y=1000^z\Rightarrow5=1000^{\frac{z}{y}}\cdots\cdots$②

①×②$\Rightarrow10=1000^{\frac{z}{x}+\frac{z}{y}}=10^{3(\frac{z}{x}+\frac{z}{y})}$

$\therefore3(\frac{z}{x}+\frac{z}{y})=1$，$\frac{z}{x}+\frac{z}{y}=\frac{1}{3}$．

4.化簡下列各式：

(1)$\sqrt{\sqrt[5]{a^{20}}}=$__________．　(2)$10^{-1.1}\div10^{-1.2}\times10^{0.9}=$__________．

(3)$\dfrac{9a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{3}{2}}\cdot3a^{\frac{1}{3}}}=$__________（$a$ 為正實數）.

解答 (1)a^2;(2)10;(3)$\frac{3}{2a}$

解析 (1)$\sqrt{\sqrt[5]{a^{20}}}=((a^{20})^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{2}}=a^2$.

(2)$10^{-1.1}\div 10^{-1.2}\times 10^{0.9}=10^{-1.1-(-1.2)+0.9}=10^1=10$.

(3)$\frac{9a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{3}{2}}\cdot 3a^{\frac{1}{3}}}=\frac{9}{6}a^{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}a^{-1}=\frac{3}{2a}$.

5.設 m、n 為整數且 3^m、3^n 均為整數，若 $3^m+3^n=10$，則 $m+n=$______________ .

解答 2

解析 $3^m+3^n=10=9+1=1+9$，$(m,n)=(2,0)$或$(0,2)$　$\therefore m+n=2$.

6.求下列各式之值：

(1)$\sqrt[3]{a^{\frac{9}{2}}\sqrt{a^{-3}}}\div\sqrt{\sqrt[3]{a^{-7}}\cdot\sqrt[3]{a}}=$______________ .（$a>0$）

(2)若$\sqrt[3]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}}}=a^x$，則 $x=$______________ .（$a>0$）

解答 (1) a^2;(2)$\frac{2}{9}$

解析 (1)原式 $=[a^{\frac{9}{2}+(-\frac{3}{2})}]^{\frac{1}{3}}\div(a^{-\frac{7}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=a\div a^{-1}=a^{1+1}=a^2$.

(2)左式 $=[a^{\frac{1}{2}}\cdot(\frac{a}{a^{\frac{2}{3}}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}}=[a^{\frac{1}{2}}\cdot(a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}}=[a^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{6})}]^{\frac{1}{3}}=(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{9}}$，$\therefore x=\frac{2}{9}$.

7.設 $x>0$ 且 $x+x^{-1}=5$，求下列各式之值：

(1) $x^2+x^{-2}=$______________ .　(2) $x^3+x^{-3}=$______________ .

(3) $x^4+x^{-4}=$______________ .　(4) $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=$______________ .

解答 (1)23;(2)110;(3)527;(4)$\sqrt{7}$

解析 (1) $x^2+x^{-2}=x^2+(x^{-1})^2=(x+x^{-1})^2-2\cdot x\cdot x^{-1}=5^2-2=23$.

(2) $x^3+x^{-3}=x^3+(x^{-1})^3=(x+x^{-1})^3-3\cdot x\cdot x^{-1}\cdot(x+x^{-1})=5^3-3\times 1\times 5=110$.

(3) $x^4+x^{-4}=(x^2)^2+(x^{-2})^2=(x^2+x^{-2})^2-2\cdot x^2\cdot x^{-2}=(23)^2-2=527$.

(4)$\because(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=(x^{\frac{1}{2}})^2+2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+(x^{-\frac{1}{2}})^2=x+2+x^{-1}=5+2=7$，　$\therefore x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$.

8.設 $x>0$ 且 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，求 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=$______________ .

解答 $\sqrt{7}$

解析 $\because(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2+4\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=(\sqrt{3})^2+4=3+4=7$，$\therefore x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{7}$.(負不合)

9.求$(124+22\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}-(27)^{\frac{1}{6}}-(16)^{\frac{3}{4}}-8^{-\frac{2}{3}}=$____________.

解答 $\frac{11}{4}$

解析 原式 $=\sqrt{124+2\sqrt{363}}-(3^3)^{\frac{1}{6}}-(2^4)^{\frac{3}{4}}-(2^3)^{-\frac{2}{3}}$

$=(\sqrt{121}+\sqrt{3})-3^{\frac{1}{2}}-2^3-2^{-2}=11+\sqrt{3}-\sqrt{3}-8-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}$.

10.已知 $64^x=10$，求 $4\cdot 8^{2x+1}=$____________.

解答 320

解析 $4\cdot 8^{2x+1}=4\cdot 8^{2x}\cdot 8^1=32\cdot(8^2)^x=32\cdot(64)^x=32\times 10=320$.

11.解方程式$8^{x^2}=4^{2x-\frac{1}{2}}$，得 $x=$____________.

解答 $\frac{1}{3}$或 1

解析 $8^{x^2}=4^{2x-\frac{1}{2}}\Rightarrow 2^{3x^2}=2^{4x-1}\Rightarrow 3x^2=4x-1\Rightarrow 3x^2-4x+1=0\Rightarrow(3x-1)(x-1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{3}$或 $x=1$.

12.設 $\sqrt[x]{32}=\sqrt[y]{2^{3y-6}}$ 且 $3^{15y+3x}=81^{xy}$，求 $x+y=$____________.

解答 8

解析 $\sqrt[x]{32}=\sqrt[y]{2^{3y-6}}\Rightarrow 2^{\frac{5}{x}}=2^{\frac{3y-6}{y}}\Rightarrow\frac{5}{x}=3-\frac{6}{y}\Rightarrow\frac{5}{x}+\frac{6}{y}=3\cdots(1)$

$3^{15y+3x}=81^{xy}\Rightarrow 3^{15y+3x}=3^{4xy}\Rightarrow 15y+3x=4xy\Rightarrow\frac{15y+3x}{xy}=4\Rightarrow\frac{15}{x}+\frac{3}{y}=4\cdots(2)$

解(1)(2)得 $x=5$，$y=3$，$\therefore x+y=8$.

13.設 $67^x=27$，$603^y=81$，求$\frac{3}{x}-\frac{4}{y}=$____________.

解答 -2

解析 $67^x=27\Rightarrow 67=27^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{3}{x}}\cdots(1)$

$603^y=81\Rightarrow 603=81^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{4}{y}}\cdots(2)$

$\frac{(1)}{(2)}$得$\frac{1}{9}=3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}$，$\therefore\frac{3}{x}-\frac{4}{y}=-2$.

14.已知 x，y，z 為異於 0 的有理數，且 $x+y+z=0$，若 $a=10^x$，$b=10^y$，$c=10^z$，求 $a^{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\times b^{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}\times c^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=$

____________.

解答 $\frac{1}{1000}$

解析 $a^{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\times b^{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}\times c^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=(10^x)^{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\times(10^y)^{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}\times(10^z)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=10^{\frac{x}{y}+\frac{x}{z}}\times10^{\frac{y}{z}+\frac{y}{x}}\times10^{\frac{z}{x}+\frac{z}{y}}$

$=10^{\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}}=10^{\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}}=10^{\frac{-y}{y}+\frac{-z}{z}+\frac{-x}{x}}=10^{-3}=\frac{1}{1000}$.

15.設$\alpha=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}},\ \beta=\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$，且 $k=\alpha+\beta$ ，試求(1) $\alpha\beta=$________ .　(2)$k^3-3k=$__________ .

解答 (1)1;(2)4

解析 (1)$\because\alpha=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}},\ \beta=\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$

$\therefore\alpha\beta=(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}})=\sqrt[3]{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\sqrt[3]{4-3}=1$

(2)$k^3-3k=(\alpha+\beta)^3-3(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=\alpha^3+\beta^3=(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})^3+(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}})^3=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$.

16.設 n 為正整數，若$x=\frac{1}{2}(5^{\frac{1}{n}}+5^{-\frac{1}{n}})$，求$(x+\sqrt{x^2-1})^n$的值為__________ .

解答 5

解析 $\because x=\frac{1}{2}(5^{\frac{1}{n}}+5^{-\frac{1}{n}})$

$\therefore x^2=\frac{1}{4}(5^{\frac{2}{n}}+2\cdot5^{\frac{1}{n}}\cdot5^{-\frac{1}{n}}+5^{-\frac{2}{n}})=\frac{1}{4}(5^{\frac{2}{n}}+2+5^{-\frac{2}{n}})$

$x^2-1=\frac{1}{4}(5^{\frac{2}{n}}+2+5^{-\frac{2}{n}})-1=\frac{1}{4}(5^{\frac{2}{n}}-2+5^{-\frac{2}{n}})=\frac{1}{4}(5^{\frac{1}{n}}-5^{-\frac{1}{n}})^2$

$\therefore\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{2}(5^{\frac{1}{n}}-5^{-\frac{1}{n}})$

故$(x+\sqrt{x^2-1})^n=\{\frac{1}{2}(5^{\frac{1}{n}}+5^{-\frac{1}{n}})+\frac{1}{2}(5^{\frac{1}{n}}-5^{-\frac{1}{n}})\}^n=(5^{\frac{1}{n}})^n=5$.

17.已知$a+b=\sqrt{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}$， $a-b=\sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$，求 $a^4+a^2b^2+b^4=$__________ .

解答 $4\sqrt{6}$

解析 $\because a+b=\sqrt{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}\Rightarrow(a+b)^2=3\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdots(1)$

$a-b=\sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}\Rightarrow(a-b)^2=3\sqrt{2}-\sqrt{3}\cdots(2)$

$(1)-(2)$ 得 $4ab=4\sqrt{3}-4\sqrt{2}\Rightarrow ab=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$(1)+(2)$ 得 $2(a^2+b^2)=2\sqrt{3}+2\sqrt{2}\Rightarrow a^2+b^2=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+b^2)^2-a^2b^2=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

$=(3+2+2\sqrt{6})-(3+2-2\sqrt{6})=4\sqrt{6}$.

18.設 $a>0$，若 $a^{2x}=3$，求(1) $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=$ ______ (2) $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=$ ______ .

解答 (1) $\frac{7}{3}$;(2) $\frac{14}{3}$

解析 (1) $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-1+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}=a^{2x}-1+a^{-2x}=3-1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$.

(2) $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}-1}$（分子、分母同乘$a^x$）$=\dfrac{9+\frac{1}{3}}{3-1}=\dfrac{\frac{28}{3}}{2}=\dfrac{14}{3}$.

19.設 $a>0$，若 $a^{3x}+a^{-3x}=52$，求(1)$a^x+a^{-x}=$ ______ . (2)$a^{2x}+a^{-2x}=$ ______ .

解答 (1)4;(2)14

解析 (1)令 $a^x+a^{-x}=t$

則 $a^{3x}+a^{-3x}=(a^x+a^{-x})^3-3a^x\cdot a^{-x}(a^x+a^{-x})=t^3-3t$

$\Rightarrow t^3-3t=52\Rightarrow t^3-3t-52=0\Rightarrow (t-4)(t^2+4t+13)=0$

$\Rightarrow t-4=0\Rightarrow t=4$，即 $a^x+a^{-x}=4$.

1+ 0− 3−52|4
+4+16+52
1+4+13, 0

(2)$a^{2x}+a^{-2x}=(a^x)^2+(a^{-x})^2=(a^x+a^{-x})^2-2\cdot a^x\cdot a^{-x}=4^2-2=16-2=14$.

20. $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=4$，求 $x=$ ______ .

解答 2或 −2

解析 $\because \sqrt{2+\sqrt{3}}\times\sqrt{2-\sqrt{3}}=1$，$\therefore \sqrt{2+\sqrt{3}}$，$\sqrt{2-\sqrt{3}}$ 互成倒數

令 $a=\sqrt{2+\sqrt{3}}$，則 $a^{-1}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$

原式 $\Rightarrow a^x+a^{-x}=4\Rightarrow a^{2x}+1=4a^x\Rightarrow a^{2x}-4\cdot a^x+1=0\quad\Rightarrow a^x=\dfrac{4\pm\sqrt{12}}{2}=2\pm\sqrt{3}$

即 $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=2+\sqrt{3}$ 或 $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=2-\sqrt{3}$ $\quad\therefore x=2$ 或 $x=-2$.

21.設 $f(x)=3^x+3^{-x}$,

(1)若 α，β 為 $f(x)=\sqrt{40}$ 的解，則 $\alpha+\beta=$ ______ .

(2)若 $f(\alpha)=\sqrt{40}$，則 $9^{\alpha}+9^{-\alpha}=$ ______ .

(3)若 $y=f(x)$與 $y=ax^2$ 的圖形，交於 A，B 兩點，已知 $\overline{AB}=4$，則 $a=$ ______ .

解答 (1)0;(2)38;(3) $\frac{41}{18}$

解析 (1) $f(x)=\sqrt{40}\Rightarrow 3^x+3^{-x}=\sqrt{40}$，

令 $3^x=t>0$，$t^2-\sqrt{40}t+1=0$，則3^{α}，3^{β}為其二根

$\Rightarrow\begin{cases}3^{\alpha}+3^{\beta}=\sqrt{40}\\3^{\alpha}\times3^{\beta}=1\end{cases}$，其中 $3^{\alpha+\beta}=3^{0}\Rightarrow\alpha+\beta=0$.

(2) $3^{\alpha}+3^{-\alpha}=\sqrt{40}\Rightarrow(3^{\alpha}+3^{-\alpha})^{2}=40\quad\Rightarrow9^{\alpha}+2+9^{-\alpha}=40\Rightarrow9^{\alpha}+9^{-\alpha}=38$.

(3) $\because\ \overline{AB}=4$，且 $y=ax^{2}$ 的圖形對稱 y 軸　$\therefore A(2,4a)\quad\Rightarrow4a=3^{2}+3^{-2}\Rightarrow a=\dfrac{41}{18}$.

22.設實數 x 與 y 滿足 $2^{x}=5$ 且 $5^{y}=\dfrac{1}{8}$，若 $n<y<n+1$，其中 n 為整數則(1) $xy=$______. (2) $n=$______.

解答 (1) -3;(2) -2

解析 (1) $2^{x}=5$

$5^{y}=\dfrac{1}{8}=2^{-3}\Rightarrow(2^{x})^{y}=2^{-3}\Rightarrow xy=-3$.

(2) $\because\ 5^{y}=\dfrac{1}{8}\Rightarrow$ (i)當 $y=0$ 則 $5^{0}=1$,

(ii)當 $y=-1$ 則 $5^{-1}=\dfrac{1}{5}$,

(iii)當 $y=-2$ 則 $5^{-2}=\dfrac{1}{25}$.

$\Rightarrow\dfrac{1}{25}<5^{y}=\dfrac{1}{8}<\dfrac{1}{5}$，$\therefore\ -2<y<-1$，$\therefore n=-2$.