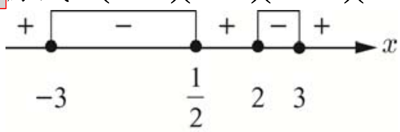
高雄市明誠中學　高一數學平時測驗　　日期：104.11.119					
範圍	2-4 多項不等式	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1. 不等式 $(x^2-9)(2x-1)(-x+2)\ge 0$ 之解為________.

答案：$-3\le x\le \frac{1}{2}$ 或 $2\le x\le 3$

解析：原式 $=(x+3)(x-3)(2x-1)(x-2)\le 0$



$\Rightarrow -3\le x\le \frac{1}{2}$ 或 $2\le x\le 3$

2. 分式不等式 $\frac{2x+3}{3x-4}\ge 0$ 之解為____________.

答案：$x\le -\frac{3}{2}$ 或 $x>\frac{4}{3}$

解析：原式即 $(2x+3)(3x-4)\ge 0$，但 $3x-4\ne 0\Rightarrow x\le -\frac{3}{2}$ 或 $x>\frac{4}{3}$

4. 不等式 $\frac{3}{x+2}\ge x$ 之解為________.

答案：$x\le -3$ 或 $-2<x\le 1$

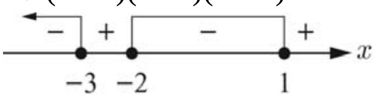
解析：$\frac{3}{x+2}-x\ge 0$

$\Rightarrow \frac{3-(x^2+2x)}{x+2}\ge 0$

$\Rightarrow (-x^2-2x+3)(x+2)\ge 0,\ \ x\ne -2$

$\Rightarrow (x^2+2x-3)(x+2)\le 0,\ \ x\ne -2$

$\Rightarrow (x+3)(x-1)(x+2)\le 0$



$\therefore x\le -3$ 或 $-2<x\le 1$

3. 若 a 為實數，方程式 $x^2+(a+2)x+(a+5)=0$ 有實根，則 a 之範圍為_____________.

答案：$a\ge 4$ 或 $a\le -4$

解析：$D=(a+2)^2-4(a+5)\ge 0$

$\Rightarrow a^2-16\ge 0\Rightarrow (a+4)(a-4)\ge 0\Rightarrow a\ge 4$ 或 $a\le -4$

4. 若 $f(x)=x^2+4x+1,\ g(x)=-x^2-2kx-1$，對任意實數 $f(x)>g(x)$ 恆成立，則 k 之範圍為_______.

答案：$-4<k<0$

解析：$\because x^2+4x+1>-x^2-2kx-1$

$\Rightarrow 2x^2+(4+2k)x+2>0\Rightarrow x^2+(k+2)x+1>0$

$D=(k+2)^2-4<0$

$\Rightarrow (k+2+2)(k+2-2)<0$

$\Rightarrow k(k+4)<0\Rightarrow -4<k<0$

5. 若 a, b 為實數，不等式 $ax^2+(ab+1)x+b>0$ 之解為 $1<x<2$，則 $a+b=$________.

答案：$-\dfrac{3}{2}$ 或 -3

解析：$1<x<2$

$\Rightarrow (x-1)(x-2)<0$

$\Rightarrow x^2-3x+2<0 \Rightarrow ax^2-3ax+2a>0,\ \ a<0$

$\therefore \begin{cases} ab+1=-3a \cdots\cdots ① \\ b=2a \cdots\cdots ② \end{cases}$

②代入①得 $a(2a)+1+3a=0 \Rightarrow 2a^2+3a+1=0 \Rightarrow (a+1)(2a+1)=0$

$\Rightarrow a=-1,\ \dfrac{-1}{2}$

$\Rightarrow b=-2,-1$

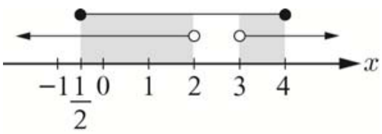
$\therefore a+b=-3,\ -\dfrac{3}{2}$

6. 不等式 $\begin{cases} x^2-5x+6>0 \\ 2x^2-9x+4\le 0 \end{cases}$ 之解為________.

答案：$\dfrac{1}{2}\le x<2$ 或 $3<x\le 4$

解析：$x^2-5x+6>0 \Rightarrow (x-2)(x-3)>0 \Rightarrow x<2$ 或 $x>3$

$2x^2-9x+4\le 0 \Rightarrow (2x-1)(x-4)\le 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}\le x\le 4$



$\therefore \dfrac{1}{2}\le x<2$ 或 $3<x\le 4$

7. 試解不等式：

(1) $x^2+x-6<0$ 解為____________.　　(2) $2x^2-3x+2<0$ 解為____________.

(3) $2x^2+x-2\ge 0$ 解為____________.　　(4) $6x^3+7x^2-9x+2>0$ 解為____________.

答案：(1) $-3<x<2$　(2)無解　(3) $x\ge\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}, x\le\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$　(4) $x>\dfrac{1}{2}, -2<x<\dfrac{1}{3}$

解析：(1) $(x+3)(x-2)<0 \Rightarrow -3<x<2$

(2) $D=9-4\times2\times2=-7<0$ 且 $2>0$，$\therefore 2x^2-3x+2<0$ 無解

(3) $D=1+4\times2\times2=17$，$\therefore x\ge\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$ 或 $x\le\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$

(4) $(x+2)(2x-1)(3x-1)>0$，$\therefore x>\dfrac{1}{2}$ 或 $-2<x<\dfrac{1}{3}$

8. 試問不等式 $(x^2-4x+2)(2x-5)(2x-37)\le 0$ 有多少個整數解？答：______個。

答案：17

解析：由 $(x^2-4x+2)(2x-5)(2x-37)\le 0$

得 $(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})(2x-5)(2x-37)\le 0$

其實數解為 $2-\sqrt{2}\le x\le\dfrac{5}{2}$ 或 $2+\sqrt{2}\le x\le\dfrac{37}{2}$

(0.58…)　(2.5)　(3.414…)　(18.5)

其整數解為 $x=1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18$ 共有 17 個。

9. 對任意實數 x，若 $\dfrac{2x^2+2ax+a}{4x^2+6x+3}<1$ 恆成立，則整數 a 之值為________.

答案：2

解析：在分母 $4x^2+6x+3$ 中

$\because 4>0$ ，且 $D=36-4\times4\times3<0$ ，$\therefore 4x^2+6x+3>0$

$2x^2+2ax+a<4x^2+6x+3 \Rightarrow 2x^2+(6-2a)x+(3-a)>0$

$D=(6-2a)^2-4\cdot2\cdot(3-a)<0$

$\Rightarrow (3-a)^2-2(3-a)<0$

$\Rightarrow (3-a)(3-a-2)<0 \Rightarrow (3-a)(1-a)<0 \Rightarrow (a-1)(a-3)<0 \Rightarrow 1<a<3$ 又 a 為整數，$\therefore a=2$

10. 若二次函數 $y=ax^2$ 的圖形恆在 $y=2x^2-2ax+(2a+5)$ 的圖形的下方，則實數 a 之範圍為______.

答案：$-2<a<\dfrac{5}{3}$

解析：$ax^2<2x^2-2ax+(2a+5) \Rightarrow (2-a)x^2-2ax+(2a+5)>0$

$2-a>0 \Rightarrow a<2$

$D=(-2a)^2-4(2-a)(2a+5)<0$

$\Rightarrow a^2-(-2a^2-a+10)<0$

$\Rightarrow 3a^2+a-10<0$

$\Rightarrow (3a-5)(a+2)<0 \Rightarrow -2<a<\dfrac{5}{3}$

11. 不等式 $10<3x^2+x<14$ 之解為________.

答案：$-\dfrac{7}{3}<x<-2$ 或 $\dfrac{5}{3}<x<2$

解析：① $3x^2+x>10$

$\Rightarrow 3x^2+x-10>0$

$\Rightarrow (3x-5)(x+2)>0 \ \Rightarrow x<-2$ 或 $x>\dfrac{5}{3}$

② $3x^2+x<14$

$\Rightarrow 3x^2+x-14<0$

$\Rightarrow (3x+7)(x-2)<0 \ \Rightarrow -\dfrac{7}{3}<x<2$

故取 $-\dfrac{7}{3}<x<-2$ 或 $\dfrac{5}{3}<x<2$

12. 不等式 $\left|x^2+x+2\right|\le\left|3x+5\right|$ 之解為____________.

答案：$-1\le x\le3$

解析：$(x^2+x+2)^2\le(3x+5)^2$

$\Rightarrow (x^2+x+2)^2-(3x+5)^2\le0$

$\Rightarrow (x^2+4x+7)(x^2-2x-3)\le0$

$\because x^2+4x+7>0 \quad (a=1>0,\ D=16-28<0)$

$\therefore x^2-2x-3\le0 \Rightarrow (x-3)(x+1)\le0 \Rightarrow -1\le x\le3$

13. 不等式 $4-x>\left|x^2-8x+14\right|$ 之解為____________.

答案：$2<x<3$

解析：$\because 4-x\ge 0 \Rightarrow x\le 4 \cdots\cdots ①$

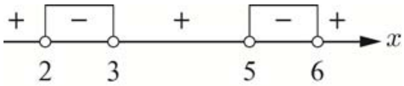
$\Rightarrow (4-x)^2>(x^2-8x+14)^2$

$\Rightarrow (x^2-8x+14)^2-(x-4)^2<0$

$\Rightarrow (x^2-9x+18)(x^2-7x+10)<0$

$\Rightarrow (x-3)(x-6)(x-2)(x-5)<0$

$\Rightarrow 2<x<3$ 或 $5<x<6 \cdots\cdots ②$

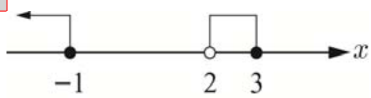


由①②知 $2<x<3$

14. 已知不等式 $\dfrac{(x-a)(x-b)}{x-c}\le 0$ 的解是 $x\le -1$ 或 $2<x\le 3$，則不等式 $\dfrac{x-c}{(x-a)(x-b)}\ge 0$ 的解為______.

答案：$-1<x\le 2$ 或 $x>3$

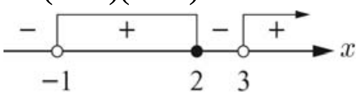
解析：



$\dfrac{(x-a)(x-b)}{x-c}\le 0 \Rightarrow (x-a)(x-b)(x-c)\le 0,\ \ x\ne c$

$\Rightarrow x-c$ 即 $x-2$，$(x-a),(x-b)$ 即 $(x+1),(x-3)$

$\therefore \dfrac{x-2}{(x+1)(x-3)}\ge 0 \Rightarrow (x-2)(x+1)(x-3)\ge 0,\ \ x\ne -1,3$



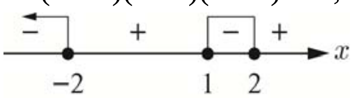
$\Rightarrow -1<x\le 2$ 或 $x>3$

15. 不等式 $(x+2)(x+1)^2(x-1)^5(x-2)\le 0$ 之解為________.

答案：$x\le -2$ 或 $x=-1$ 或 $1\le x\le 2$

解析：$\because (x+1)^2\ge 0,\ (x-1)^5$ 與 $x-1$ 同號

$\therefore (x+2)(x-1)(x-2)\le 0,\ \ x=-1$



$\Rightarrow x\le -2$ 或 $x=-1$ 或 $1\le x\le 2$

16. 設二次函數 $y=f(x)=ax^2+2bx=\dfrac{4}{b}$ 在 $x=1$ 時有最大值 5，則數對 $(a,b)=$______或______.

答案：$(-1,1),(-4,4)$

解析：$y=ax^2+2bx+\dfrac{4}{b}=a(x-1)^2+5$

$\therefore 2b=-2a,\ \dfrac{4}{b}=a+5 \Rightarrow a=-1$ 或 -4 $\qquad \Rightarrow (a,b)=(-1,1)$ 或 $(-4,4)$

17. 不等式 $-1<\dfrac{x-3}{x+1}<2$ 則解為____________.

答案：$x>1$ 或 $x<-5$

解析：同乘 $(x+1)^2 \Rightarrow -(x+1)^2<(x-3)(x+1)<2(x+1)^2$

$\Rightarrow 2(x+1)(x-1)>0$ 且 $(x+1)(x+5)>0$

$\Rightarrow x>1$ 或 $x<-5$

18. 設 k 為一整數。若方程式 $kx^2+7x+1=0$ 有兩個相異實根，且兩根的乘積介於 $\frac{5}{71}$ 與 $\frac{6}{71}$ 之間，則 $k=$________ 。

答案：12

解析：$\begin{cases}49-4k>0\\ \frac{5}{71}<\frac{1}{k}<\frac{6}{71}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k<12\frac{1}{4}\\ 5<\frac{71}{k}<6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k\le 12\\ 5k<71<6k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k\le 12\\ 11\frac{5}{6}<k<14\frac{1}{5}\end{cases}\Rightarrow k=12,13,14\text{且}k\le 12\,.\,k=12$

19. 設 a,b 為正整數。若 $b^2=9a$ ，且 $a+2b>280$，則 a 的最小可能值為________ 。

答案：225

解析：$\because b^2=9a$ ，將 $a=\frac{b^2}{9}$ 代入 $a+2b>280$ 得

$\frac{b^2}{9}+2b>280\Rightarrow b^2+18b>280\times 9\Rightarrow b^2+18b-2520>0$

$\Rightarrow (b+60)(b-42)>0\Rightarrow b>42\text{或}b<-60$

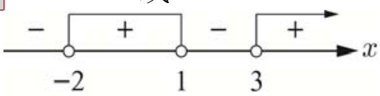
$\Rightarrow b^2>(42)^2\Rightarrow 9a>(42)^2\Rightarrow a>(14)^2$ 且 a 為完全平方數

$\therefore a$ 的最小可能值為 $(15)^2=225\,.$

20. 設 a, b, c, d 為實數且 $a\ne 0$，若 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，已知 $f(x)>0$ 的解為 $-2<x<1$ 或 $x>3$，則 $f(1-2x)<0$ 的解為________________.

答案：$-1<x<0$ 或 $x>\frac{3}{2}$

解析：$-2<x<1$ 或 $x>3$



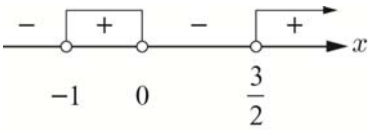
$\Rightarrow (x+2)(x-1)(x-3)>0$

$\Rightarrow x^3-2x^2-5x+6>0$

$\therefore\ f(x)=a(x+2)(x-1)(x-3),\ \ a>0$

$\Rightarrow\ f(1-2x)=a[(1-2x)+2][(1-2x)-1][(1-2x)-3]<0$

$\Rightarrow (3-2x)(-2x)(-2x-2)<0\Rightarrow x(2x-3)(x+1)>0$



$\therefore -1<x<0$ 或 $x>\frac{3}{2}$

21. 設 a 為實數，若方程式 $x^3+3x^2+ax+9=0$ 有純虛根，則 $a=$______, 又此虛根為何________.

答案：$3,\ \pm\sqrt{3}i$

解析：$x^3+3x^2+ax+9=0$ 有純虛根 $\alpha i\quad(\alpha\in\mathbb{R})$

$\therefore(\alpha i)^3+3(\alpha i)^2+a(\alpha i)+9=0\Rightarrow(-3\alpha^2+9)+i(-\alpha^3+a\alpha)=0$

$\therefore -3\alpha^2+9=0\Rightarrow\alpha=\pm\sqrt{3}$

$-\alpha^3+a\alpha=0$ ，$\therefore a=\alpha^2=3$ 　　此虛根為 $\pm\sqrt{3}i$

22. 若 $(2-i)$ 為 $x^2+(5-2i)x+a=0$ 之一根，則 $a=$ ________ ，又另一根為________.

答案：$-11+13i,\ -7+3i$

解析：$(2-i)^2+(5-2i)(2-i)+a=0$

$\therefore a=-(4-4i-1)-(10-2-4i-5i)=-11+13i$

另一根為 β ，$\alpha+\beta=-5+2i$ ，$\therefore \beta=-7+3i$

23. 試求方程式 $2x^4+x^3-21x^2-2x+6=0$ 的四根為______________.

答案：$x=3,\dfrac{1}{2}$ 或 $-2\pm\sqrt{2}$

解析：

$$\begin{array}{r|l} 2+1-21-2+6 & 3 \\ 6+21+0-6 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2+7+0-2+0 & \dfrac{1}{2} \\ 1+4+2 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 2 & \underline{2+8+4+0} \\ & 1+4+2 \end{array}$$

原式 $=(x-3)(2x-1)(x^2+4x+2)=0$ $\therefore x=3,\dfrac{1}{2}$ 或 $-2\pm\sqrt{2}$

24. 設 k 為整數，若 $f(x)=x^4+2x^3+kx^2-3kx-3$ 為整係數多項式，若已知 $f(x)$ 有整係數之一次因式，則 $k=$________或________.

答案：0, 1

解析：$\because f(x)$ 有整係數一次因式，則必為 $(x\pm1),(x\pm3)$

$\therefore f(1)=-2k=0\Rightarrow k=0$

$f(-1)=4k-4=0\Rightarrow k=1$

$f(3)=132\neq0,\ f(-3)=18k+24=0\Rightarrow k=-\dfrac{4}{3}$(不合) $\therefore k=0$ 或 1

25. 設 $f(x)=2ax^2-(2+5a)$ ，a 為非零實數，若方程式 $f(x)=0$ 有一根在 -2 與 -1 之間，則 a 的範圍為_________或_________.

答案：$a>\dfrac{2}{3}$ 或 $a<-\dfrac{2}{3}$

解析：$\because f(-2)f(-1)<0$ ，$\therefore (3a-2)(-2-3a)<0$ $\therefore a>\dfrac{2}{3}$ 或 $a<-\dfrac{2}{3}$