高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：104.11.11					
範圍	2-3 多項方程式	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1. 方程式 $\frac{6}{x^2-1}-\frac{3}{x-1}=1$ 之解為________.

答案：-4

解析：同乘 x^2-1 得 $6-3(x+1)=x^2-1$

$\Rightarrow x^2+3x-4=0$

$\Rightarrow (x+4)(x-1)=0$

$\Rightarrow x=-4,1$ (1 不合) $\therefore x=-4$

2. 方程式 $x^4-1=0$ 之解為________.

答案：$\pm1,\pm i$

解析：$x^4-1=0$

$\Rightarrow (x^2-1)(x^2+1)=0$

$\Rightarrow (x+1)(x-1)(x^2-i^2)=0$

$\Rightarrow (x+1)(x-1)(x+i)(x-i)=0$

$\Rightarrow x=\pm1,\pm i$

3. 若 $f(x)=x^{20}+2x^{12}$，則 $f(x)$ 除以 $[x-(1-i)]$ 之餘式為________.

答案：-1152

解析：$r=f(1-i)$

$=(1-i)^{20}+2(1-i)^{12}$

$=(1-2i+i^2)^{10}+2(1-2i+i^2)^6$

$=(1-2i-1)^{10}+2(1-2i-1)^6$

$=(-2i)^{10}+2(-2i)^6$

$=1024\cdot(i^4)^2\cdot i^2+128\cdot i^4\cdot i^2$

$=-1024-128=-1152$

4. 設 a,b 為整數，若多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx-7$ 有三個相異的一次因式，則 $a+b=$______.

答案：6

解析：$(x\pm1),(x\pm7)$ 可能為 $f(x)$ 之一次有理因式

$f(x)=(x-1)(x+1)(x+7)$

$=(x^2-1)(x+7)$

$=x^3+7x^2-x-7$

$\therefore a=7,\ b=-1\Rightarrow a+b=6$

5. 方程式 $x^2=3-4i$ 之解為________.

答案：$2-i$ 或 $-2+i$

解析：設 $x=a+bi$，a,b 為實數 $x^2=(a+bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=(a^2-b^2)+2abi=3-4i$

$\therefore \begin{cases} a^2-b^2=3 \\ 2ab=-4 \end{cases}$，以 $b=\frac{-2}{a}$ 代入得

$a^2-(\frac{-2}{a})^2=3\Rightarrow a^4-3a^2-4=0\Rightarrow (a^2-4)(a^2+1)=0\Rightarrow a^2=4,\ -1$ (-1不合)

$\therefore a=2,-2\Rightarrow b=-1,1\Rightarrow x=2-i$ 或 $-2+i$

6. 設三次方程式 $x^3-10x^2+37x-52=0$ 有兩複數根 $a-2i,\ 3+bi$，其中 a, b 為非零實數，則此方程式之實根為________.

答案：4

解析：∵實係數方程式虛根成對　$\therefore a=3, b=2$

$[x-(3-2i)][x-(3+2i)]=x^2-6x+13$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1-4 \\
\cline{2-2}
1-6+13 & 1-10+37\ -52 \\
 & 1-\ 6+13 \\
\cline{2-2}
 & -\ 4+24\ -52 \\
 & -\ 4+24\ -52 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

$x^3-10x^2+37x-52=(x^2-6x+13)(x-4)=0$　　$\therefore x=4$

7. 設 $f(x)=x^4-x^3+kx^2-2kx-3$，k 為大於 -5 的整數，且 $f(x)$ 有整係數一次因式，則 $k=$____.

答案：-3

解析：$(x\pm1), (x\pm3)$ 可能為上式之一次有理因式

$f(1)=1-1+k-2k-3=0\Rightarrow k=-3$

$f(-1)=1+1+k+2k-3=0\Rightarrow k=\dfrac{1}{3}$

$f(3)=81-27+9k-6k-3=0\Rightarrow k=-17$

$f(-3)=81+27+9k+6k-3=0\Rightarrow k=-7$

$\because k>-5$，k 為整數　$\therefore k=-3$

8. 設 x, y 為實數，若 $(-3+2i)(x+yi)+(2y-6xi)=-3+5i$，則 $x=$______，$y=$_______.

答案：1，-3

解析：$(-3+2i)(x+yi)+(2y-6xi)=-3+5i\Rightarrow -3x+(-3y-4x)i=-3+5i$　　$\therefore x=1, y=-3$

9. 設 $f(x)$ 為一實係數多項式，若 $f(2-i)=4i-7$，則 $f(2+i)=$______.

答案：$-7-4i$

解析：$\because f(2-i)=4i-7$，$\therefore f(2+i)=f(\overline{2-i})=\overline{4i-7}=-7-4i$

10. 方程式 $2x^4-x^3+2x^2-6x-5=0$ 有一根 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，則此方程式之所有的根為_____________.

答案：$\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{39}i}{4}$

解析：設 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，則 $x^2-x-1=0$

$2x^4-x^3+2x^2-6x-5=(x^2-x-1)(2x^2+x+5)$　$\therefore$方程式的根為 $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1\pm\sqrt{39}i}{4}$

11. 若 k 為實數，方程式 $f(x)=x^3-x^2+4x+k=0$ 有純虛數的根，則 $k=$____，另一實根為___.

答案：-4, 1

解析：$\because k$ 為實數

設 $\alpha i, -\alpha i, \beta$ 為其根，α, β 為實數　$(\alpha i)+(-\alpha i)+\beta=1\Rightarrow \beta=1$

$f(1)=1-1+4+k=0\Rightarrow k=-4$

12. 若 α 與 β 為二次方程式 $x^2-3x+1=0$ 之根，則

(1) $(\alpha-\beta)^2=$_______.　(2) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=$_______.　(3) $\alpha^3+\beta^3=$_______.　(4) $\alpha^5+\beta^5=$________.

答案：(1)5　(2)7　(3)18　(4)123

解析：$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=1$

(1) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9-4=5$

(2) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{9-2}{1}=7$

(3) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=3^3-3\times1\times3=18$

(4) $\alpha^5+\beta^5=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^2)-(\alpha^2\beta^3+\alpha^3\beta^2)=7\times18-\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)=126-3=123$

13. 若α,β為$x^2+7x+9=0$之二根，試求下列各值：

(1) $(\alpha^3+7\alpha^2)(\beta^3+7\beta^2)=$________.　(2) $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=$________.

答案：729, -13

解析：$\begin{cases}\alpha+\beta=-7\\ \alpha\beta=9\end{cases}$

$\because \alpha\beta>0,\ \alpha+\beta<0$，$\therefore \alpha<0,\ \beta<0$

(1) $\because x^2+7x=-9\Rightarrow x^3+7x^2=-9x$

即$\alpha^3+7\alpha^2=-9\alpha,\ \beta^3+7\beta^2=-9\beta$所求$=(-9\alpha)(-9\beta)=81\alpha\beta=729$

(2) $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\beta$
$=(\alpha+\beta)-2\sqrt{\alpha\beta}$
$=-7-2\sqrt{9}=-13$

14. 若α,β,γ為$x^3+3x^2+4x+1=0$之三個根，則

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=$________.　(2) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=$________.

(3) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=$________.　(4) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=$________.

答案：(1)-4　(2)-11　(3)1　(4)6

解析：$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-3\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4\\ \alpha\beta\gamma=-1\end{cases}$

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{4}{-1}=-4$

(2) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(-3-\gamma)(-3-\alpha)(-3-\beta)$
$=-27-(\alpha+\beta+\gamma)\cdot9-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\cdot3-\alpha\beta\gamma$
$=-27-(-3)\cdot9-4\cdot3-(-1)$
$=-11$

(3) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=(-3)^2-2\cdot4=9-8=1$

(4) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$
$\Rightarrow\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3+(-3)(1-4)=-3+9=6$

15. 若a,b為有理數，且$2+\sqrt{3}$為$f(x)=x^4+ax^3-4x^2+bx+3=0$之一根，則數對$(a,b)=$______，$f(x)=0$的其他三個根為______________.

答案：$(-2,-10),\ 2-\sqrt{3},\ -1\pm\sqrt{2}i$

解析：由有理係數方程式無理根成對知，另一根為$x=2-\sqrt{3}$

$\therefore [x-(2+\sqrt{3})][x-(2-\sqrt{3})]=0 \Rightarrow x^2-4x+1=0$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \quad +(a+4)+3 \\
\hline
1-4+1 & 1 + a - 4 + b + 3 \\
 & 1 - 4 + 1 \\
\hline
 & (a+4) - 5 + b \\
 & (a+4)-4(a+4)+(a+4) \\
\hline
 & (4a+11)+(-a+b-4)+3 \\
 & 3 - 12 + 3 \\
\hline
 & (4a+8)+(-a+b+8) \ +0
\end{array}$$

$\therefore \begin{cases} 4a+8=0 \\ -a+b+8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-10 \end{cases} \quad (a,b)=(2,-10)$

$f(x)=(x^2-4x+1)(x^2+2x+3)=0 \Rightarrow x=2\pm\sqrt{3},\ \dfrac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2} \Rightarrow x=2\pm\sqrt{3},\ -1\pm\sqrt{2}i$

16. 設 a, b 為實數，且 $f(x)=x^4-x^3+ax^2+7x+b=0$ 有一根為 $1-2i$，則數對 $(a,b)=$________，另外三根為________.

答案：$(2,-5), 1+2i, \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

解析：由虛根成對我們知 $1+2i$ 亦為其根

$[x-(1-2i)][x-(1+2i)]=x^2-2x+5$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1+1 - 1 \\
\hline
1-2+5 & 1-1 + a + 7 + b \\
 & 1-2 + 5 \\
\hline
 & 1 + (a-5)+7 \\
 & 1 - 2 + 5 \\
\hline
 & (a-3)+2 + b \\
 & -1 + 2 - 5 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

$\begin{cases} a-3=-1 \Rightarrow a=2 \\ b=-5 \end{cases}$，$\therefore (a,b)=(2,-5)$

$f(x)=(x^2-2x+5)(x^2+x-1)=0 \Rightarrow x=1\pm 2i,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

17. 若 $f(x)=x^4+x^3-2x^2+40x-55$，則 $f(1+3i)=$________.

答案：$3-6i$

解析：令 $x=1+3i \Rightarrow x-1=3i \Rightarrow x^2-2x+1=9i^2=-9 \Rightarrow x^2-2x+10=0$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1+3 - 6 \\
\hline
1-2+10 & 1+1 - 2+40 -55 \\
 & 1-2+10 \\
\hline
 & 3-12+40 \\
 & 3- 6+30 \\
\hline
 & - 6+10 -55 \\
 & - 6+12 -60 \\
\hline
 & - 2 + 5
\end{array}$$

$f(x)=(x^2-2x+10)(x^2+3x-6)-2x+5 \Rightarrow f(1+3i)=0-2(1+3i)+5=3-6i$

18. 設 y 為實數，若 $z=2+yi$ 且 $\frac{1}{z}$ 之虛部為 $\frac{1}{5}$，則 $z=$______.

答案：$z=2-i$ 或 $2-4i$

答案：$\frac{1}{z}=\frac{1}{2+yi}=\frac{2-yi}{4+y^2}$

$\therefore \frac{-y}{4+y^2}=\frac{1}{5} \Rightarrow y^2+5y+4=0 \Rightarrow (y+1)(y+4)=0 \Rightarrow y=-1$ 或 -4

$\therefore z=2-i$ 或 $2-4i$

19. 設 z 為複數，若 $z\cdot(1+i)^{26}=(1-i)^{20}$，則 $z=$________.

答案：$\frac{1}{8}i$

解析：$(1+i)^2=2i,\ (1-i)^2=-2i,\ z\cdot(2i)^{13}=(-2i)^{10}$ $\quad z=\frac{1}{2^3 i^3}$，$\therefore z=\frac{1}{8}i$

20. 設 a,b 為實數，且 $a+b=-10,\ ab=21$，則 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=$__________.

答案：$(\sqrt{7}+\sqrt{3})i$

解析：$a+b=-10,\ ab=21 \Rightarrow a<0,\ b<0$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}=a+b-2\sqrt{ab}=-10-2\sqrt{21} \Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}=(\sqrt{7}+\sqrt{3})i$

21. 設 a 為實數，若方程式 $x^3+3x^2+ax+9=0$ 有純虛根，則 $a=$______, 又此虛根為何_______.

答案：$3,\ \pm\sqrt{3}i$

解析：$x^3+3x^2+ax+9=0$ 有純虛根 $\alpha i \quad (\alpha\in\mathbb{R})$

$\therefore(\alpha i)^3+3(\alpha i)^2+a(\alpha i)+9=0 \Rightarrow (-3\alpha^2+9)+i(-\alpha^3+a\alpha)=0$

$\therefore -3\alpha^2+9=0 \Rightarrow \alpha=\pm\sqrt{3}$

$-\alpha^3+a\alpha=0$，$\therefore a=\alpha^2=3$ $\quad$ 此虛根為 $\pm\sqrt{3}i$

22. 若 $(2-i)$ 為 $x^2+(5-2i)x+a=0$ 之一根，則 $a=$ _______，又另一根為________.

答案：$-11+13i,\ -7+3i$

解析：$(2-i)^2+(5-2i)(2-i)+a=0$

$\therefore a=-(4-4i-1)-(10-2-4i-5i)=-11+13i$

另一根為 β，$\alpha+\beta=-5+2i$，$\therefore \beta=-7+3i$

23. 試求方程式 $2x^4+x^3-21x^2-2x+6=0$ 的四根為______________.

答案：$x=3,\frac{1}{2}$ 或 $-2\pm\sqrt{2}$

解析：

$$\begin{array}{l|l} 2+1-21-2+6 & 3 \\ \quad 6+21+0-6 & \\ \hline 2+7+0-2+0 & \frac{1}{2} \\ \quad\quad 1+4+2 & \\ \hline 2\,|\,2+8+4+0 & \\ \quad 1+4+2 & \end{array}$$

原式 $=(x-3)(2x-1)(x^2+4x+2)=0$ $\quad \therefore x=3,\frac{1}{2}$ 或 $-2\pm\sqrt{2}$

24. 設 k 為整數，若 $f(x)=x^4+2x^3+kx^2-3kx-3$ 為整係數多項式，若已知 $f(x)$ 有整係數之一次因式，則 $k=$________或________.

答案：0, 1

解析：$\because$ $f(x)$ 有整係數一次因式，則必為 $(x\pm 1),(x\pm 3)$

$\therefore f(1)=-2k=0 \Rightarrow k=0$

$f(-1)=4k-4=0 \Rightarrow k=1$

$f(3)=132\neq 0,\ f(-3)=18k+24=0 \Rightarrow k=-\dfrac{4}{3}$(不合)　　$\therefore k=0$ 或 1

25. 設 $f(x)=2ax^2-(2+5a)$，a 為非零實數，若方程式 $f(x)=0$ 有一根在 -2 與 -1 之間，則 a 的範圍為_________或_________.

答案：$a>\dfrac{2}{3}$ 或 $a<-\dfrac{2}{3}$

解析：$\because$ $f(-2)f(-1)<0$，$\therefore (3a-2)(-2-3a)<0$　$\therefore a>\dfrac{2}{3}$ 或 $a<-\dfrac{2}{3}$