高雄市明誠中學　高一數學平時測驗　　日期：104.10.29					
範圍	2-2 多項式	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1. 若 $f(x)=x^3-4x^2+8x-1,\ g(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)+d$　且 $f(x)=g(x)$，則 $(a,b,c,d)=$________.

答案：(1, 2, 3, 4)

解析：$\because f(x)=g(x)$

$\therefore f(1)=1-4+8-1=4=d=g(1)$

$f(2)=8-16+16-1=7=c+4=g(2)\Rightarrow c=3$

$f(3)=27-36+24-1=14=2b+6+4=2b+10=g(3)\Rightarrow b=2$

$f(4)=64-64+32-1=31=6a+12+9+4=6a+25=g(4)\Rightarrow a=1$ 故 $(a,b,c,d)=(1,2,3,4)$

2. 已知 a, b 為實數，若 $f(x)=x^2+ax+b,\ g(x)=bx^2+2x-a$，若 $f(x)\cdot g(x)$ 的乘積中，x^2 項之係數為 0，常數項為 8，則數對 (a,b) 為________.

答案：$(-4,2)$

解析：$f(x)\cdot g(x)=\cdots+(-a+2a+b^2)x^2+\cdots-ab$

$\therefore \begin{cases} a+b^2=0\cdots\cdots① \\ -ab=8\cdots\cdots② \end{cases}$　由②得 $a=-\dfrac{8}{b}$ 代入①得

$-\dfrac{8}{b}+b^2=0\Rightarrow b^3-8=0\Rightarrow (b-2)(b^2+2b+4)=0\Rightarrow b=2$　$\therefore a=-4$　故 $(a,b)=(-4,2)$

3. 若 $f(x)=3x^3-4x^2+ax+5$ 除以 $x-1$ 之餘式為 2，則 a 之值為______, $f(\frac{1}{3})=$______.

答案：-2, 4

解析：$f(1)=3-4+a+5=2\Rightarrow a=-2$

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & -4 & -2 & +5 & \frac{1}{3} \\ & +1 & -1 & -1 & \\ \hline 3 & -3 & -3, & 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rrr} 3 & 3 & -3 & -3 \\ & 1 & -1 & -1 \end{array}$$

$\therefore f(\frac{1}{3})=4$

4. 設 a, b 為實數，若 x^2+x-2 是 $f(x)=x^{10}+30x^5+ax+b$ 的因式，則數對 $(a,b)=$________.

答案：$(11,-42)$

解析：$\because x^2+x-2 \mid f(x)\Rightarrow (x+2)(x-1)\mid f(x)$

$\therefore f(1)=0$ 且 $f(-2)=0$

$\begin{cases} f(1)=1+30+a+b=0 \\ f(-2)=(-2)^{10}+30(-2)^5-2a+b=0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a+b=-31 \\ 2a-b=1024-960=64 \end{cases}$ 解得 $a=11,\ b=-42$

5. 已知 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 之商式為 $Q(x)$，餘式為 $r(x)$，若 a, b 為實數，且為非 0 之實數，則以 $af(x)$ 除以 $bg(x)$，可得商式________，餘式________.

答案：$\dfrac{a}{b}Q(x),\ ar(x)$

解析：$\because f(x)=g(x)\cdot Q(x)+r(x)$

$\Rightarrow af(x)=ag(x)\cdot Q(x)+ar(x)=bg(x)\cdot[\frac{a}{b}Q(x)]+ar(x)$ 故商式為 $\frac{a}{b}Q(x)$，餘式為 $ar(x)$

6. 若多項式 $f(x)$ 除以 $(2x-3)$ 之餘式為 16，則
 (1) $x^3f(x)$ 除以 $2x-3$ 之餘式為________.
 (2) $x^2f(x)$ 除以 $x-\frac{3}{2}$ 之餘式為________.

答案：(1)54　(2)36

解析：令 $f(x)=(2x-3)Q(x)+16$，$\therefore f(\frac{3}{2})=16$

(1) $x^3f(x)=(2x-3)[x^3Q(x)]+16x^3$　故餘式為 $(\frac{3}{2})^3\cdot f(\frac{3}{2})=\frac{27}{8}\times16=54$

(2) $x^2f(x)=(x-\frac{3}{2})[2x^2Q(x)]+16x^2$　故餘式為 $(\frac{3}{2})^2\cdot f(\frac{3}{2})=\frac{9}{4}\times16=36$

7. 若 a,b 為實數，且 x^2+x-2 可整除 $f(x)=(x-a)[(x-1)^2+b(x-1)+18]$，則數對 $(a,b)=$____.

答案：(1, 9)

解析：$\because (x+2)(x-1)\mid f(x)$

$\therefore f(1)=1-a=0\Rightarrow a=1$

$f(-2)=(-2-a)[9-3b+18]=0\Rightarrow 27-3b=0\Rightarrow b=9$　$(a,b)=(1,9)$

8. 若 x^2+nx+1 整除 x^3+3x^2+mx+2 時，則 $m=$______, $n=$______。

答案：3, 1

解析：
$$\begin{array}{r|l}
 & 1+2 \\ \hline
1+n+1 & 1+\ 3\ +\ m\ +2 \\
 & 1+\ n\ +\ 1 \\ \cline{2-2}
 & +(3-n)+(m-1)+2 \\
 & 2\ +\ 2n\ +2 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

$\therefore 3-n-2=0\Rightarrow n=1$　　$m-1-2n=0$，$\therefore m=3$

9. 設 $f(x)=x^3+2x^2+ax-7$ 以 $x-2$ 與 $x+3$ 分別除之其餘數相同，則 $a=$____，又其餘數為_______.

答案：$-5, -1$

解析：$\because f(2)=f(-3)$，$\therefore 8+8+2a-7=-27+18-3a-7\Rightarrow a=-5$ 餘數為 $f(2)=-1$

10. 設 $f(x)=3x^{123}-7x^{12}+5x^2-8$，則 $x+1$ 除 $f(x)$ 的餘式為________.

答案：-13

解析：$f(-1)=-3-7+5-8=-13$

11. 小胖利用綜合除法求 $2x^4+x^3+5x^2+2x+3$ 除以 $2x-a$ 得餘式 18，其算式如下，則 $d+f=$___ ·

$$\begin{array}{ccccc|c}
2+ & 1+ & 5+ & 2+ & 3 & \frac{a}{2} \\
 & b & c-12 & f & & \\ \hline
2 & -2 & d & e & g &
\end{array}$$

答案：23

解析：① $\because b+1=-2$，$\therefore b=-3$

② $\because 2\times\frac{a}{2}=b=-3$，$\therefore a=-3$

③ $c=(-2)\times\frac{a}{2}=(-2)\times(\frac{-3}{2})=3$

④ $d=5+c=5+3=8$

⑤ $e=2-12=-10$

⑥ $f=e\times\frac{a}{2}=(-10)\times(\frac{-3}{2})=15$

$\therefore d+f=8+15=23$

12. 已知多項式 $f(x)$，若分別以 $x-1,x-2,x-3$ 除之餘式依次為 $4,-2,6$， $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 的餘式為 ax^2+bx+c，則 $a+2b+3c=$ ___________．

答案：25

解析：依題意可設 $f(x)=(x-1)Q_1(x)+4\cdots\cdots$①

$=(x-2)Q_2(x)-2\cdots\cdots$②

$=(x-3)Q_3(x)+6\cdots\cdots$③

$=(x-1)(x-2)(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c\cdots\cdots$④

$x=1$ 代入①④得 $a+b+c=4\cdots\cdots$⑤

$x=2$ 代入②④得 $4a+2b+c=-2\cdots\cdots$⑥

$x=3$ 代入③④得 $9a+3b+c=6\cdots\cdots$⑦

⑥−⑤得 $3a+b=-6\cdots\cdots$⑧

⑦−⑥得 $5a+b=8\cdots\cdots$⑨

⑨−⑧得 $2a=14\Rightarrow a=7$

代入⑨得 $b=-27$

代入⑤得 $c=24$

$\therefore a+2b+3c=7-54+72=25$

13. 設 $f(x)$ 是一個二次函數，若 $f(x)$ 之圖形通過 $(2007,4)$，$(2008,5)$，$(2009,8)$ 三點，則 $f(2015)=$ ___________．

答案：68

解析：利用牛頓插值法，可設

$f(x)=a(x-2007)(x-2008)+b(x-2007)+c$

$x=2007$ 代入得 $f(2007)=c=4$

$x=2008$ 代入得 $f(2008)=b+c=5\Rightarrow b=1$

$x=2009$ 代入得 $f(2009)=2a+2b+c=8\Rightarrow a=1$

$\therefore f(x)=(x-2007)(x-2008)+(x-2007)+4\Rightarrow f(2015)=8\times7+8+4=68$

14. 若多項式 x^3+4x^2+5x-3 除以 $f(x)$ 的商式為 $x+2$，餘式為 $2x-1$，則 $f(x)=$ ___________．

答案：x^2+2x-1

解析：

$$\begin{array}{r|l} 1+4+3-2 & -2 \\ -2-4+2 & \\ \hline 1+2-1+0 & \end{array}$$

$f(x)=[x^3+4x^2+5x-3-(2x-1)]\div(x+2)=(x^3+4x^2+3x-2)\div(x+2)=x^2+2x-1$

15. 若多項式 $f(x)=ax^3+2x^2+bx+4$，且 $f(-1)=1$，則 $f(1)=$ ___________．

答案：11

解析：$f(-1)=-a+2-b+4=1\Rightarrow a+b=5$ 故 $f(1)=a+2+b+4=11$

16. 若多項式 $f(x)=x^3+ax^2-x+4$ 被 $x-2$ 除餘 2，則多項式 $f(x)$ 被 $x+2$ 除於___________．

答案：-10

解析：$f(2)=8+4a-2+4=2\Rightarrow a=-2$ 故 $f(-2)=-8-8+2+4=-10$

17. 設 $\deg f(x)=3$，且 $f(1)=f(2)=0$， $f(0)=2$， $f(-1)=-6$，則 $f(x)=$__________．(不必展開)

答案：$(2x+1)(x-1)(x-2)$

解析：設 $f(x)=(ax+b)(x-1)(x-2)$

$f(0)=2$， $f(-1)=-6$ 代入得 $\begin{cases} b\cdot(-1)(-2)=2 \\ (-a+b)(-2)(-3)=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=2 \end{cases}$

故 $f(x)=(2x+1)(x-1)(x-2)$

18. 設 $f(x)=x^{33}+x^{32}+x^{31}+x+2$，則 $f(x)$ 除以 (x^2+x+1) 之餘式為________.

答案：2

解析：令 $x^2+x+1=0\Rightarrow x^2=-x-1$

$\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)=(x-1)\cdot 0$

$\Rightarrow x^3-1=0$

將 $x^3=1$ 代入 $f(x)$ 中得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(x^3)^{11}+(x^3)^{10}\cdot x^2+(x^3)^{10}\cdot x+x+2\\&=1+x^2+2x+2\\&=x^2+2x+3\\&=(-x-1)+2x+3\\&=x+2\end{aligned}$$

$\therefore$所求為 $x+2$

19. 設多項式 $f(x)$ 的次數高於三次，且 $f(x)$ 除以 $x-1,\ x^2-2x+3$ 之餘式分別為 2 與 $4x+8$，則以 $(x-1)(x^2-2x+3)$ 除 $f(x)$ 之餘式為________.

答案：$-5x^2+14x-7$

解析：$f(x)=(x-1)Q_1(x)+2=(x^2-2x+3)Q_2(x)+4x+8$

設 $f(x)=(x-1)(x^2-2x+3)Q_3(x)+a(x^2-2x+3)+4x+8$

$f(1)=2a+4+8=2\Rightarrow a=-5$

$\therefore r(x)=-5(x^2-2x+3)+4x+8=-5x^2+14x-7$

20. 若 $\deg f(x)=3$，且 $f(0)=f(1)=f(2)=4,\ f(3)=-2$，則 $f(-1)=$________.

答案：10

解析：設 $f(x)=ax(x-1)(x-2)+4$

$f(3)=a\times3\times2\times1+4=-2\Rightarrow a=-1$

$\therefore\ f(x)=-x(x-1)(x-2)+4$

故 $f(-1)=1(-2)(-3)+4=6+4=10$

21. 若 $\deg f(x)=3$，且 $f(100)=1,\ f(101)=9,\ f(102)=7,\ f(103)=7$，則 $f(104)=$________.

答案：21

解析：設 $f(x)=a(x-100)(x-101)(x-102)+b(x-100)(x-101)+c(x-100)+1$

$$\begin{cases} f(101)=c+1=9\Rightarrow c=8 \\ f(102)=2b+8\times2+1=7\Rightarrow b=-5 \\ f(103)=6a-5\times3\times2+8\times3+1=7\Rightarrow a=2 \end{cases}$$

$\therefore\ f(x)=2(x-100)(x-101)(x-102)-5(x-100)(x-101)+8(x-100)+1$

$\Rightarrow\ f(104)=2\times4\times3\times2-5\times4\times3+8\times4+1=48-60+32+1=21$

22. $4(\frac{3-2\sqrt{2}}{2})^4-8(\frac{3-2\sqrt{2}}{2})^3-15(\frac{3-2\sqrt{2}}{2})^2+13(\frac{3-2\sqrt{2}}{2})+4=$ ________.

答案：5

解析：設 $f(x)=4x^4-8x^3-15x^2+13x+4$

又 $x=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 2x-3=-2\sqrt{2}\Rightarrow 4x^2-12x+9=8\Rightarrow 4x^2-12x+1=0$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+\ \ 1-\ 1 \\
\hline
4-12+1 & 4-\ 8-15+13+4 \\
 & \underline{4-12+\ 1} \\
 & \quad\ \ 4-16+13 \\
 & \quad\ \ \underline{4-12+\ 1} \\
 & \qquad -\ 4+12+4 \\
 & \qquad \underline{-\ 4+12-1} \\
 & \qquad\qquad\quad 5
\end{array}
$$

即 $f(x)=(4x^2-12x+1)(x^2+x-1)+5$ $\quad f(\frac{3-2\sqrt{2}}{2})=5$

23. 若 $f(x)=x^4-5x^3+4x^2-6x+2=a(x+1)^4+b(x+1)^3+c(x+1)^2+d(x+1)+e$，則 $(a,b,c,d,e)=$ ________，且 $f(-0.99)=$ ________. (四捨五入到小數點第二位)

答案：$(1,-9,25,-33,18)$, 17.67

解析：

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -5 & +4 & -6 & +2 & -1 \\
 & -1 & +6 & -10 & +16 & \\
\hline
1 & -6 & +10 & -16 & ,\ 18 & \\
 & -1 & +7 & -17 & -1 & \\
\hline
1 & -7 & +17 & ,-33 & & \\
 & -1 & +8 & -1 & & \\
\hline
1 & -8 & ,\ 25 & & & \\
 & -1 & -1 & & & \\
\hline
1, & -9 & & & &
\end{array}
$$

$(a,b,c,d,e)=(1,-9,25,-33,18)$

$\therefore f(x)=(x+1)^4-9(x+1)^3+25(x+1)^2-33(x+1)+18$

$f(-0.99)=(0.01)^4-9(0.01)^3+25(0.01)^2-33(0.01)+18\approx 17.67$

24. 若 a,b 為實數，且 $f(x)=\frac{x^4+ax^3-6x^2+bx+1}{x^2-2x-1}$ 為二次函數，則數對 $(a,b)=$ ____________.

答案：$(0,0)$

解析：$\because f(x)$ 為二次函數

$\therefore x^2-2x-1$ 為 $x^4+ax^3-6x^2+bx+1$ 之因式

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1+ & (a+2)- & 1 & & \\
\hline
1-2-1 & 1+ & a & -6 & +b & +1 \\
 & 1- & 2 & -1 & & \\
\hline
 & & (a+2) & -5 & +b & \\
 & & (a+2) & -(2a+4) & -(a+2) & \\
\hline
 & & & +(2a-1) & +(a+b+2) & +1 \\
 & & & -1 & +2 & +1 \\
\hline
 & & & 2a & +(a+b) & +0
\end{array}
$$

$\therefore \begin{cases} 2a=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$

25. 設 $f(x)$ 為 x 的三次多項式， $g(x)$ 為 x 的四次多項式，則

(1) $f(x^2)$ 是 x 的____次多項式.

(2) $f(x)\cdot g(x)$ 是 x 的____次多項式.

(3) $f(x)-g(x)$ 是 x 的____次多項式.

答案：6, 7, 4

解析：令 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ， a,b,c,d 為實數

(1) $f(x^2)=a(x^2)^3+b(x^2)^2+c(x^2)+d=ax^6+bx^4+cx^2+d \Rightarrow \deg f(x^2)=6$

(2) $\deg(f(x)\cdot g(x))=\deg f(x)+\deg g(x)=7$

(3) $\deg(f(x)-g(x))=\deg g(x)=4$

26. 設 $f(x)=(x^{37}-4x^{23}+4x^{15}-3x^2-1)(x^7-2x^6+5x^3-x+2)$

$=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{44}x^{44}$ ，則：

(1) $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{44}=$____.

(2) $a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{43}=$____.

答案：−15,−20

解析：$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{44}=f(1)=(-3)\times(5)=-15$

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{43}=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}=\dfrac{(-15)-25}{2}=-20$

27. 設 $f(x)=x^3-5x^2-kx+9$ 可被 $x-3$ 整除，則 $k=$______，又 $f(x)=0$ 之根為______.

答案：−3; 3, 3, −1

解析：$\because f(3)=0$ ，$\therefore 27-45-3k+9=0$ ，$\therefore k=-3$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & -5 & +3 & +9 & 3 \\
 & +3 & -6 & -9 & \\
\hline
1 & -2 & -3 & +0 &
\end{array}
$$

$\therefore f(x)=(x-3)(x-3)(x+1)$ $\therefore f(x)=0$ 之三根為 3, 3, −1

28. 設 $f(x)=x^3-2x^2+4x-1, g(x)=f(2x+3)$ ，則以 $2x+1$ 除 $g(x)$ 的餘式為________.

答案：7

解析：$g(-\frac{1}{2})=f(2)=8-8+8-1=7$

29. 求以 x^2+2x+3 除 $(2x^2+x+6)^3$ 所得之餘式為__________ .

答案：$-27x-162$

解析：$2x^2+x+6=2(x^2+2x+3)-3x$

$\therefore$原式$=[2(x^2+2x+3)-3x]^3\div(x^2+2x+3)$

餘式同$(-3x)^3\div(x^2+2x+3)$　　故餘式為$-27x-162$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & -27 & +54 & & \\
\hline
1+2+3 & -27+ & 0+ & 0+ & 0 \\
 & -27 & -54- & 81 & \\
\hline
 & & 54+ & 81+ & 0 \\
 & & 54 & +108 & +162 \\
\hline
 & & & -27 & -162
\end{array}
$$

30. 設多項式$f(x)$除以$x-1$，$x-2$，$x-3$之餘式依序為 3，7，13，則$f(x)$除以$(x-1)(x-2)(x-3)$之餘式為__________．

答案：x^2+x+1

解析：$f(x)=(x-1)\cdot Q_1(x)+3$

$=(x-2)\cdot Q_2(x)+7$

$=(x-3)\cdot Q_3(x)+13$

$=(x-1)(x-2)(x-3)\cdot Q_4(x)+a(x-1)(x-2)+b(x-1)+3$

把$x=3$，2代入得$\begin{cases}a\cdot2\cdot1+b\cdot2+3=13\\ b\cdot1+3=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=4\end{cases}$

故餘式為$(x-1)(x-2)+4(x-1)+3=x^2+x+1$