高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：104.11.05						
範圍	2-2 多項式.方程式	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1.設 $f(x)=(-x^3+x+2)^9$

(1) $f(x)$的常數項為____________． (2) $f(x)$的各項係數和為____________．

解答 (1) 512;(2) 512

2.若 $2x^3+ax+10$ 除以 x^2-3x+b 的商為 $2x+c$ 餘式 $3x-2$，求 $(a,\ b,\ c)=$____________．

解答 $(-11,\ 2,\ 6)$

解析

$$\begin{array}{r|l} & 2+6 \\ 1-3+b & 2+0+a+10 \\ & 2-6+2b \\ \hline & 6+(a-2b)+10 \\ & 6-18+6b \\ \hline & (a-2b+18)+(10-6b) \end{array}$$

商為 $2x+6$，餘式 $(a-2b+18)x+(10-6b)$ $\begin{cases} c=6 \\ a-2b+18=3 \\ 10-6b=-2 \end{cases} \Rightarrow a=-11,\ b=2$

3.設多項式 $f(x)$ 除以 $2x^2+2x+2$ 的商為 $4x+2$，餘式 $x+1$，求 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 的

(1)商＝____________． (2)餘式＝____________．

解答 (1) $8x+4$;(2) $x+1$

解析

$\div 2$：$\dfrac{f(x)}{2x^2+2x+2}=4x+2\cdots\cdots x+1$

$\downarrow \times 2$ $\downarrow$ 不變

$\dfrac{f(x)}{x^2+x+1}=8x+4\cdots\cdots x+1$

4.求 $f(x)=x^{81}+x^{49}+x^{29}+x^9+x$ 除以 $g(x)=x^4+x^2+1$ 的餘式為____________．

解答 x^3+x

解析 $(x^4+x^2+1)(x^2-1)=x^6-1=0\Rightarrow x^6=1$代入 $f(x)$，

$f(x)=(x^6)^{13}\cdot x^3+(x^6)^8\cdot x+(x^6)^4\cdot x^5+x^6\cdot x^3+x$

$\Rightarrow x^3+x+x^5+x^3+x=x^5+2x^3+2x=(x^4+x^2+1)(x)+x^3+x$，

$f(x)$ 除以 x^4+x^2+1 之餘式＝x^5+2x^3+2x 除以 x^4+x^2+1 之餘式＝x^3+x ．

5.若多項式 $f(x)$除以 x^2-5x-6，$2x^2+5x+2$ 之餘式分別為 $3x-1$，$5x+3$，則 $f(x)$除以 x^2+3x+2 之餘式為______．

解答 $3x-1$

解析 設 $f(x)=(x-6)(x+1)Q_1(x)+3x-1=(2x+1)(x+2)Q_2(x)+5x+3=(x+1)(x+2)Q_3(x)+ax+b$，

$\because f(-1)=3(-1)-1=-4$，$f(-2)=5\times(-2)+3=-7$，

$\therefore -a+b=-4$，$-2a+b=-7\Rightarrow a=3$，$b=-1$，故所求餘式為 $3x-1$．

6.設 $f(x)$為一多項式，a，$b\in \boldsymbol{R}$，$a\neq 0$，以 $x-\dfrac{b}{a}$除 $f(x)$所得之商式為 $Q(x)$，餘式為 r，則以 $x-b$ 除 $f(\dfrac{x}{a})$所得之商式為____________．

解答 $\dfrac{Q(\frac{x}{a})}{a}$

解析 $\because\ f(x)=(x-\frac{b}{a})Q(x)+r\quad\therefore\ f(\frac{x}{a})=(\frac{x}{a}-\frac{b}{a})Q(\frac{x}{a})+r=(x-b)\dfrac{Q(\frac{x}{a})}{a}+r$

故以 $x-b$ 除 $f(\frac{x}{a})$所得之商式為 $\dfrac{Q(\frac{x}{a})}{a}$

7.設多項式 $f(x)$除以 $x-\frac{b}{a}$ 的餘式是 r，則 $x^2f(x)$除以 $ax-b$ 的餘式為____________ .

解答 $\dfrac{b^2r}{a^2}$

解析 已知 $f(x)=(x-\frac{b}{a})q(x)+r$

$$x^2f(x)=x^2(x-\frac{b}{a})q(x)+rx^2=(ax-b)\frac{1}{a}x^2q(x)+(\frac{r}{a}x+\frac{br}{a^2})(ax-b)+\frac{b^2r}{a^2}$$

$$=(ax-b)[\frac{1}{a}x^2q(x)+(\frac{r}{a}x+\frac{br}{a^2})]+\frac{b^2r}{a^2}$$ 故餘式為 $\dfrac{b^2r}{a^2}$

8.若 $b<-2$ 且 $x^4+2x^3+7x^2+ax+10$ 可被 x^2+2x-b 整除，則 $a+b=$____________ .

解答 -1

解析

1	2	7	a	10	-2
	-2	0	$-14-2b$		b
		b	0	$b(7+b)$	
1	0	$7+b$	$a-2b-14$	$10+b(7+b)$	

$\begin{cases}a-2b-14=0\\10+7b+b^2=0\end{cases}\Rightarrow\ (a,b)=(4,-5)$，$(10,-2)$（不合） $\therefore\ a+b=4-5=-1$

9.$f(x)=ax^4+bx^3+1$ 可被$(x-1)^2$ 整除，則(1)$(a,b)=$____________ . (2)商式為____________ .

解答 (1)$(3,-4)$;(2) $3x^2+2x+1$

10.設 x 的多項式 $3(x-1)^3+4(x-1)^2+2=a(x-1)(x-2)(x+1)+b(x-1)(x-2)+c(x-2)+d$ ，求 $(a,b,c,d)=$_______ .

解答 $(3,1,7,9)$

解析 $x=2$ 代入 $\Rightarrow\ 3+4+2=d\quad\therefore d=9$

$x=1$ 代入 $\Rightarrow\ 2=c\times(-1)+d\ \Rightarrow\ c=7$

$x=-1$ 代入 $\Rightarrow\ 3\times(-2)^3+4\times(-2)^2+2=b(-2)(-3)+c(-3)+d$

即 $6b-3c+d=-6\ \Rightarrow\ b=1$

$x=0$ 代入 $\Rightarrow\ 3\times(-1)^3+4\times(-1)^2+2=a(-1)(-2)\times1+b(-1)(-2)+c(-2)+d$

即 $2a+2b-2c+d=3\ \Rightarrow\ 2a+2-14+9=3\ \Rightarrow\ a=3$

11.設 $2x^{10}-2x^9+x^8=a_{10}(2x-1)^{10}+a_9(2x-1)^9+a_8(2x-1)^8+\cdots+a_1(2x-1)+a_0$，且 $a_0,a_1,\cdots,a_{10}$ 皆為實數 .

(1)求 a_{10}的值 =____________ . (2)求 a_0的值 =____________ .

(3)求 $2a_{10}-a_9+a_8-a_7+a_6-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1+2a_0$的值 =____________ .

解答 (1) $\frac{1}{512}$;(2) $\frac{1}{512}$;(3) $\frac{1}{256}$

解析 (1)比較係數 $\Rightarrow$ $a_{10}\times 2^{10}=2$ $\therefore$ $a_{10}=\frac{1}{2^9}=\frac{1}{512}$

(2)令 $x=\frac{1}{2}$ 代入 $\Rightarrow$ $a_0=2\times(\frac{1}{2})^{10}-2\times(\frac{1}{2})^9+(\frac{1}{2})^8=2\times(\frac{1}{2})^{10}=\frac{1}{512}$

(3)令 $x=0$ 代入 $\Rightarrow$ $a_{10}-a_9+a_8-a_7+a_6-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1+a_0=0$

$\therefore$ $2a_{10}-a_9+a_8-a_7+a_6-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1+2a_0$

$=a_{10}+(a_{10}-a_9+a_8-a_7+a_6-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1+a_{0)})+a_0=\frac{1}{512}+0+\frac{1}{512}=\frac{1}{256}$

12.已知 $f(x)=(x^2+1)(x^{10}+1)+x-1$，則

(1) $f(x)$除以 $x+1$ 得餘式為____________ . (2) $(x+1)f(x)$除以 x^2+1 得商式為____________ .

解答 (1) 2;(2) $x^{11}+x^{10}+x+2$

解析 所求 $=f(-1)=[(-1)^2+1][(-1)^{10}+1]-1-1=2\cdot 2-1-1=2$

$(x+1)f(x)=(x+1)(x^2+1)(x^{10}+1)+(x+1)(x-1)$

$=(x^2+1)(x+1)(x^{10}+1)+(x^2+1)-2=(x^2+1)[(x+1)(x^{10}+1)+1]-2$

得商式為$(x+1)(x^{10}+1)+1=x^{11}+x^{10}+x+2$

13.設 $17^5-15\times 17^4-35\times 17^3+13\times 17^2+a\times 17+1=35$，則 $a=$____________ .

解答 70

解析 令 $f(x)=x^5-15x^4-35x^3+13x^2+ax+1$ $\therefore$ $f(17)=35$

表 $x-17$ 除 $f(x)$的餘式為 35，由綜合除法：

1	−15	−35	13	a	1	17
	17	34	−17	−68	$17a-68\times17$	
1	2	−1	−4	$a-68$	,35	

$\Rightarrow$ $17a-68\times 17+1=35$ $\therefore$ $17a=68\times 17+34\Rightarrow$ $a=68+2=70$

14.若三次多項式 $g(x)$的 $g(-1)=g(0)=g(2)=0$，$g(1)=4$，試問 $g(x)=$____________ .

解答 $-2x(x+1)(x-2)$

解析 由 $g(-1)=g(0)=g(2)=0$，$\deg g(x)=3$，可設 $g(x)=ax(x+1)(x-2)$

又 $g(1)=a\times 2\times(-1)=4$ $\Rightarrow$ $a=-2$，故 $g(x)=-2x(x+1)(x-2)$

15.設 $\deg f(x)=3$，已知 $f(1)=f(2)=f(3)=4$，$f(4)=34$，則 $f(x)=$____________ .

解答 $5(x-1)(x-2)(x-3)+4$

解析 $\because$ $f(1)=f(2)=f(3)=4$ $\therefore$ $f(x)$除以 $x-1$，$x-2$，$x-3$ 都餘 4

設 $f(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)+4$

$\because$ $f(4)=34$ $\therefore$ $a(3)(2)(1)+4=34$ $\therefore$ $a=5$

$\therefore$ $f(x)=5(x-1)(x-2)(x-3)+4$

16.設 $f(x)$為三次多項式，且已知 $f(0)=1$，$f(1)=9$，$f(2)=8$，$f(3)=4$，則 $f(4)=$____________ .

解答 3

解析 設 $f(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)+d$

由 $f(1)=9$，得 $9=d$

由 $f(2)=8$，得 $8=c+d=c+9$ $\Rightarrow$ $c=-1$

由 $f(3)=4$，得 $4=2b+2c+d=2b-2+9$ $\Rightarrow$ $b=-\frac{3}{2}$

由 $f(0)=1$，得 $1=-6a+2b-c+d=-6a-3+1+9 \Rightarrow a=1$

$\therefore \quad f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)-\dfrac{3}{2}(x-1)(x-2)-(x-1)+9$

故 $f(4)=3\times 2\times 1-\dfrac{3}{2}\times 3\times 2-3+9=3$

【解 2】

$$f(x)=1\times\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}+9\times\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}$$

$$+8\times\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}+4\times\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$$

$$f(4)=1\times\frac{(4-1)(4-2)(4-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}+9\times\frac{(4-0)(4-2)(4-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}$$

$$+8\times\frac{(4-0)(4-1)(4-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}+4\times\frac{(4-0)(4-1)(4-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}=-1+36-48+16=3$$

17.以 $x-1$ 除多項式 $f(x)$ 餘 1，以 x^2+x+1 除 $f(x)$ 餘式 $-x-1$，求以 x^3-1 除 $f(x)$ 之餘式為____________.

解答 x^2

解析 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$\because f(x)=(x-1)Q_1(x)+1 \quad \therefore f(1)=1$

設 $f(x)=(x-1)(x^2+x+1)Q'(x)+a(x^2+x+1)-x-1$

$\because f(1)=a\times(1+1+1)-1-1=1 \Rightarrow a=1 \qquad \therefore$餘式為 $(x^2+x+1)-x-1=x^2$

18.設 $f(x)=x^{17}+4x^3-3x+1$，則：(1)以 x^2-x+1 除 $f(x)$之餘式為____________.

(2)以 x^4-x^3+x-1 除 $f(x)$之餘式為____________.

解答 (1) $-4x-2$;(2) $5x^3-x^2-3x+2$

解析 (1)令 $x^2-x+1=0 \Rightarrow (x+1)(x^2-x+1)=x^3+1=0 \quad \therefore x^3=-1$

$r(x)=(x^3)^5\times x^2+4x^3-3x+1=(-1)^5\times x^2+4\times(-1)-3x+1$

$=-x^2-3x-3 \quad =-(x-1)-3x-3=-4x-2$

(2)$\because \quad x^4-x^3+x-1=(x-1)(x^3+1)$且由(1)知：$x^3+1$ 除 $f(x)$的餘式為 $-x^2-3x-3$

$\therefore$ 可設 $f(x)=x^{17}+4x^3-3x+1$……①

$=(x^3+1)\,Q_1(x)+(-x^2-3x-3)$

$=(x-1)(x^3+1)\,Q_2(x)+k(x^3+1)+(-x^2-3x-3)$……②

令 $x=1$ 代入①② $\quad \therefore \quad f(1)=3=k\times 2+(-7) \quad \therefore \quad k=5$

$\Rightarrow \quad r(x)=5(x^3+1)+(-x^2-3x-3)=5x^3-x^2-3x+2$

19.計算 $2(\dfrac{3+\sqrt{17}}{4})^4+(\dfrac{3+\sqrt{17}}{4})^3-(\dfrac{3+\sqrt{17}}{4})^2-10(\dfrac{3+\sqrt{17}}{4})+2$ 之值為____________.

解答 $\dfrac{23+\sqrt{17}}{4}$

解析 令 $x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{4} \Rightarrow 4x-3=\sqrt{17} \overset{\text{平方}}{\Rightarrow} 16x^2-24x-8=0 \quad \therefore \quad 2x^2-3x-1=0$

設 $f(x)=2x^4+x^3-x^2-10x+2 \Rightarrow$ 求值式$=f(\dfrac{3+\sqrt{17}}{4})$

$\because \quad f(x)=(2x^2-3x-1)(x^2+2x+3)+(x+5)$

$\therefore \quad f(\frac{3+\sqrt{17}}{4})=\frac{3+\sqrt{17}}{4}+5=\frac{23+\sqrt{17}}{4}$

```
              1+2 +3
        ________________
2−3−1 ) 2 +1−1−10+2
        2−3−1
        ________
           4+0−10
           4−6 −2
        ___________
              6 −8+2
              6 −9−3
        ___________
                 1+5
```

20.設多項式 $(x+1)^6$ 除以 x^2+1 的餘式為 $ax+b$，則(1) $a=$ ____________，(2) $b=$ ____________ .

解答 (1) -8 ;(2)0

解析 令 $A=x^2+1$，則 $(x+1)^2=x^2+2x+1=A+2x$

$(x+1)^6=[(x+1)^2]^3=(A+2x)^3=A^3+6xA^2+12x^2A+8x^3$

$=A(A^2+6xA+12x^2)+8x(x^2+1)-8x$

$=A(A^2+6xA+12x^2+8x)-8x$ 　　故 $a=-8$，$b=0$

21.若 $\alpha=1+i$，$\beta=2-3i$，求

(1) $\alpha+\beta=$ ____________ . (2) $\alpha-\beta=$ ____________ . (3) $\alpha\beta=$ ____________ . (4) $\frac{\alpha}{\beta}=$ ____________ .

解答 (1) $3-2i$;(2) $-1+4i$;(3) $5-i$;(4) $\frac{-1}{13}+\frac{5}{13}i$

解析 (1) $\alpha+\beta=(1+i)+(2-3i)=(1+2)+(1-3)i=3-2i$

(2) $\alpha-\beta=(1+i)-(2-3i)=1+i-2+3i=-1+4i$

(3) $\alpha\beta=(1+i)(2-3i)=2-3i+2i-3i^2=5-i$

(4) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1+i}{2-3i}=\frac{(1+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{2+3i+2i+3i^2}{4-9i^2}=\frac{-1+5i}{13}=\frac{-1}{13}+\frac{5}{13}i$

22.x，$y\in \boldsymbol{R}$，若 $\frac{1+3i}{x+yi}=1+i$，則數對$(x，y)=$ ____________ .

解答 (2，1)

解析 $\because \quad \frac{1+3i}{x+yi}=1+i \quad \therefore x+yi=\frac{1+3i}{1+i}=\frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{4+2i}{2}=2+I$

$\because \quad x，y\in R \quad \therefore \quad x=2，y=1$

23.a，b 為實數，$\frac{1}{4+2i}+\frac{1}{a+bi}=\frac{2}{5}$，則數對$(a，b)=$ ____________ .

解答 (4, −2)

解析 $\frac{1}{4+2i}+\frac{1}{a+bi}=\frac{2}{5}\Rightarrow \frac{1}{a+bi}=\frac{2}{5}-\frac{1}{4+2i}=\frac{2(4+2i)-5}{5(4+2i)}=\frac{3+4i}{20+10i}$

$a+bi=\frac{20+10i}{3+4i}=\frac{(20+10i)(3-4i)}{3^2+4^2}=\frac{(60+40)+(30-80)i}{25}=4-2i$

24.設 a，$b\in \boldsymbol{R}$ 且$[(a+1)-4i]+[5+(b-2)i]=2+5i$，則 $\overline{a+bi}=$ ____________ .

解答 $-4-11i$

解析 $[(a+1)-4i]+[5+(b-2)i]=2+5i \quad \Rightarrow \quad (a+1+5)+(-4+b-2)i=2+5i$

$\Rightarrow \quad (a+6)+(b-6)i=2+5i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a+6=2 \\ b-6=5 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} a=-4 \\ b=11 \end{cases} \quad \therefore \quad \overline{a+bi}=\overline{-4+11i}=-4-11i$

25.化簡 $\dfrac{5i^5+4i^3+1}{8i^9-5i-3}=$____________．

解答 $-\dfrac{i}{3}$

解析 原式 $=\dfrac{5i-4i+1}{8i-5i-3}=\dfrac{1+i}{-3+3i}=\dfrac{(1+i)(-3-3i)}{(-3+3i)(-3-3i)}=\dfrac{-3-3i-3i-3i^2}{9-(9i^2)}=\dfrac{-6i}{18}=-\dfrac{i}{3}$

26.求方程式 $6x^4-7x^3-6x^2+2x+1$ 的

(1)有兩個整係數一次因式為__________．　(2)另一個二次因式為__________．

解答 (1) $2x-1$，$3x+2$;(2) x^2-x-1

解析 設 $px-q$ 為整係數一次因式，則 $p \mid 6$，$q \mid 1$ $\Rightarrow$ $p=\pm1$，±2，±3，±6，$q=\pm1$

則 $\dfrac{q}{p}$ 可能為 ±1，$\pm\dfrac{1}{2}$，$\pm\dfrac{1}{3}$，$\pm\dfrac{1}{6}$，而檢驗得只有 $f(\dfrac{1}{2})=0$，$f(\dfrac{-1}{3})=0$

故整係數一次因式 $2x-1$，$3x+2$　根據除法另一個二次因式 x^2-x-1

27.若 $x^4+kx^3-2x^2+(k+3)x-2$ 有一次因式，求整數 $k=$____________．

解答 0 或 -3

解析 可能的一次因式為 $x\pm1$，$x\pm2$

(1)若一次因式為 $x-1$ $\Rightarrow$ $1+k-2+(k+3)-2=0 \Rightarrow k=0$

(2)若一次因式為 $x+1$ $\Rightarrow$ $1-k-2-(k+3)-2=0 \Rightarrow k=-3$

(3)若一次因式為 $x-2$ $\Rightarrow$ $16+8k-8+2(k+3)-2=0 \Rightarrow k=-\dfrac{6}{5}$（不合）

(4)若一次因式為 $x+2$ $\Rightarrow$ $16-8k-8-2(k+3)-2=0 \Rightarrow k=0$

故 $k=0$ 或 -3

28.設 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，則化簡 $(1+\omega)^6+(1+\omega^2)^6+(\omega+\omega^2)^6$ 之值為____________．

解答 3

解析 $\because \quad \omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} \quad \therefore \quad \omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$

$\therefore \quad (1+\omega)^6+(1+\omega^2)^6+(\omega+\omega^2)^6=(-\omega^2)^6+(-\omega)^6+(-1)^6$

$=\omega^{12}+\omega^6+1=(\omega^3)^4+(\omega^3)^2+1=3$