高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：104.10.01					
範圍	1-2 絕對值	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1.下列拋物線 Γ_1：$y=\frac{1}{3}x^2+1$，Γ_2：$y=\frac{1}{2}x^2-2$，Γ_3：$y=-2x^2+1$，Γ_4：$y=-3x^2+x$，

(1)開口最小的是____________． (2)開口最大的是____________．

解答 (1)Γ_4最小;(2)Γ_1最大

解析 $y=ax^2+bx+c$，$|a|$ 愈大，開口愈小

由於$\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<|-2|<|-3|$，故$\Gamma_1$的開口最大，$\Gamma_4$的開口最小

2.設 k 為實數,若二次函數 $f(x)=x^2-4x+(k+1)$,在 $0\le x\le 3$ 時,有最大值 2015,求 k 之值為______．

解答 2014

解析 $f(x)=x^2-4x+(k+1)$（$0\le x\le 3$）$=(x-2)^2+(k-3)$

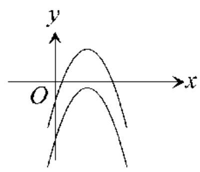
當 $x=0$ 時，有最大值 $k+1=2015 \Rightarrow k=2014$

3.拋物線 $y=ax^2+bx+c$，若 $a<0$，$b>0$，$c<0$，則

(1)頂點在第____________象限內。 (2)拋物線必不通過第____________象限。

解答 (1)一或四;(2)二

解析 $y=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$，頂點$(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a})$



$\because\ a<0$，$b>0\ \therefore\ -\frac{b}{2a}>0 \Rightarrow$ 頂點在 y 軸右邊

$a<0 \Rightarrow$ 開口向下，$c<0 \Rightarrow$ 與 y 軸交點在 x 軸下方

但 b^2-4ac 正負不定，故頂點在一或四象限內，拋物線不過第二象限

4.有一二次函數 $y=f(x)$滿足 $f(0)=2$，$f(1)=6$，$f(-1)=0$，則 $f(x)$之最小值為____________．

解答 $-\frac{1}{4}$

解析 令 $f(x)=(x+1)(ax+b)$ $\because\ f(0)=2 \Rightarrow b=2$

又 $f(1)=6 \Rightarrow 2(a+b)=6\ \therefore\ a+b=3$，故 $a=1$

故 $f(x)=(x+1)(x+2)=x^2+3x+2=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}\ge-\frac{1}{4}$，故 $f(x)$之 min 為 $-\frac{1}{4}$

5.若二次函數 $y=ax^2+bx$ 在 $x=1$ 時有最小值 $-\frac{1}{a}$，則 $3a+b$ 之值為____________．

解答 1

解析 $y=ax^2+bx$ 在 $x=1$ 時有最小值 $-\frac{1}{a}$

$\Rightarrow \quad y = a(x-1)^2 - \dfrac{1}{a}$ 且 $a > 0 \quad \Rightarrow \quad y = ax^2 - 2ax + a - \dfrac{1}{a}$

比較係數，得 $b = -2a$ 且 $a - \dfrac{1}{a} = 0 \quad \therefore \quad a^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1$，$b = -2$ 故 $3a + b = 3 - 2 = 1$

6.設 $f(x) = 2\,|\,x + 3| - 5$，

(1) x 為任意實數時，$f(x)$的最小值為____________．

(2) $-1 \le x \le 2$ 時，$f(x)$的最小值為____________

(3)承上題，$f(x)$ 的最大值為____________．

解答　(1) -5;(2)最小值 -1;(3)最大值 5

解析　$f(x) = 2\,|\,x + 3| - 5$

(1) x 為任意實數時，$|\,x + 3\,| \ge 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \ge -5$，最小值 -5，沒有最大值

(2)(3)若 $-1 \le x \le 2$，則當 $x = -1$ 時，$f(-1) = 2\,|-1 + 3\,| - 5 = -1$ 為最小值

當 $x = 2$ 時，$f(2) = 2\,|\,2 + 3\,| - 5 = 5$ 為最大值

7.某電影院的每張票價 200 元時，觀眾有 600 人，若票價每減少 10 元時，則觀眾就增加 50 人，則每張電影票價訂為____________元時，可使電影院的收入最多．

解答　160

解析　設票價減 $10x$ 元時，可使收入最多

收入$= (200 - 10x)(600 + 50x) = 500(-x^2 + 8x + 240) = 500[-(x-4)^2 + 256]$

當 $x = 4$，即票價為 $200 - 10 \times 4 = 160$ 元時，收入最多

8.已知 f 為 $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ 之函數且 $f(n) = \begin{cases} n+2，n \le 5 \\ f(f(n-3))，n \ge 6 \end{cases}$，則 $f(6) =$____________．

解答　7

解析　$f(6) = f(f(3)) = f(3 + 2) = f(5) = 5 + 2 = 7$

9.將 $y = x^2 + 2x + 2$ 之圖形向右平移 2 單位，再向下平移 3 單位，若所得圖形之方程式為 $y = ax^2 + bx + c$，則 $c =$_______．

解答　-1

解析　$y = x^2 + 2x + 2$ 向右平移 2 單位，向下平移 3 單位

$\Rightarrow \quad y + 3 = (x-2)^2 + 2(x-2) + 2 \quad \Rightarrow \quad y = x^2 - 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad c = -1$

10.將拋物線 $y = (x-1)^2$ 沿直線 $y = x$ 向東北方向移動，在第一次經過點 $A(4，9)$時，所得新拋物線方程式為____．

解答　$y = (x-6)^2 + 5$

解析　設 $y = (x-1)^2$ 向右平移 k 單位，再向上平移 k 單位時第一次經過 $A(4，9)$

即 $y = (x - 1 - k)^2 + k$ 過 $A(4，9)$，k 取最小正值

$\therefore \quad 9 = (4 - 1 - k)^2 + k \quad \therefore \quad k = 0$ 或 5，取最小正值 $k = 5$

$\therefore \quad y = (x - 1 - 5)^2 + 5$，即 $y = (x-6)^2 + 5$ 為所求

$\because \quad y = f(x)$有最大值 $\quad \therefore \quad a = -1$，$b = 6$，即$(a，b) = (-1，6)$

11.某次考試分數普遍不理想，但因為大家平常都很努力，許老師想用一個線型函數，將原本最低 30 分調高成 60 分，原本最高 60 分調高為 100 分，求　(1)此線型函數 $f(x) =$____________．　(2)原本 42 分調整後成為___________分．

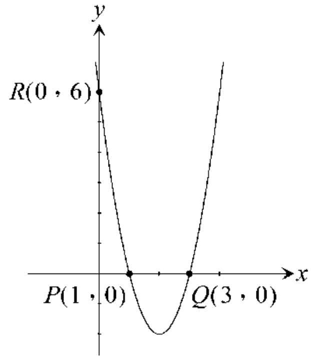
解答　(1) $\dfrac{4}{3}x + 20$;(2)76

解析　(1)設此線型函數 $f(x) = ax + b$ 由題意知 $f(30) = 60$

$f(60)=100 \Rightarrow a=\dfrac{4}{3}$，$b=20$ $\therefore f(x)=\dfrac{4}{3}x+20$

(2) $f(42)=\dfrac{4}{3}\times 42+20=76$

12.設二次函數 $y=ax^2+bx+6$ 在 $x=2$ 時，有最小值-2，且此函數的圖形與 x 軸交於 P，Q 兩點，與 y 軸交於 R 點，試求此△PQR 的面積為____________ .



解答 6

解析 由題意，設 $f(x)=a(x-2)^2-2=ax^2-4ax+(4a-2)$

故 $ax^2+bx+6=ax^2-4ax+(4a-2)$

$\begin{cases} b=-4a \\ 6=4a-2 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a=2 \\ b=-8 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $y=2x^2-8x+6$

令 $y=0 \Rightarrow 2x^2-8x+6=0 \Rightarrow x=1$，$3$，即 $P(1，0)$，$Q(3，0)$

令 $x=0 \Rightarrow y=6$，即 $R=(0，6)$，則△PQR 之面積$=\dfrac{1}{2}\overline{PQ}\times$高$=\dfrac{1}{2}\times 2\times 6=6$

13.設一拋物線 $y=x^2+ax+b$，其中 a，b 皆為實數，若通過$(3，2)$且頂點在直線 $L：x-y-1=0$ 上，求

數對$(a，b)=$____________ .（有兩組解）

解答 $(-4，5)$，$(-6，11)$

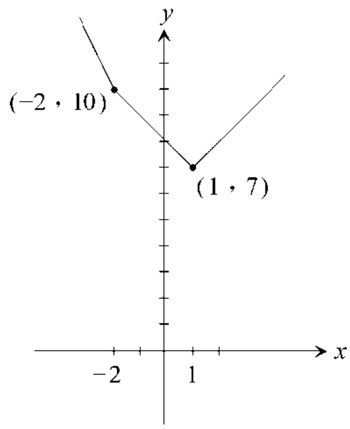
解析 $(3，2)$代入 $y=x^2+ax+b \Rightarrow b=-3a-7$ ……①

則 $y=x^2+ax+b=x^2+ax+(-3a-7)=(x+\dfrac{a}{2})^2-3a-7-\dfrac{a^2}{4}$

頂點$(\dfrac{-a}{2}，-3a-7-\dfrac{a^2}{4})$代入 $x-y-1=0 \Rightarrow a^2+10a+24=0$

即$(a+4)(a+6)=0$，$a=-4$ 或-6 代入①得 $b=5$ 或 11 $\therefore$ $(a，b)=(-4，5)$或$(-6，11)$

14.函數 $f(x)=|x-1|+|x+2|-x+5$ 之最小值為____________ .



解答 7

解析 $f(x)=|x-1|+|x+2|-x+5$，$x=1$，-2 分割數線為 3 部分

① $x<-2$ 時，$f(x)=-(x-1)-(x+2)-x+5=-3x+4$

② $-2\le x\le 1$ 時，$f(x)=-(x-1)+(x+2)-x+5=-x+8$

③ $x>1$ 時，$f(x)=(x-1)+(x+2)-x+5=x+6$

圖形為一折線，折點為$(-2，10)$，$(1，7)$ $\therefore f(x)$的最小值為 7

15.設 $f(x)=2345x+56789$，則 $\dfrac{f(\sqrt{4321})-f(\sqrt{3210})}{\sqrt{4321}-\sqrt{3210}}$ 之值為____________ .

解答 2345

解析 $\because$ $f(x)$圖形為一直線，通過點 $A(\sqrt{4321}，f(\sqrt{4321}))$，$B(\sqrt{3210}，f(\sqrt{3210}))$

$\therefore$ 其斜率為 $\dfrac{f(\sqrt{4321})-f(\sqrt{3210})}{\sqrt{4321}-\sqrt{3210}}=2345$

16.$x\in \boldsymbol{R}$，則 $f(x)=(x^2+2x+5)^2+2(x^2+2x+5)+7$ 的最小值為____________ .

解答 31

解析 令 $k=x^2+2x+5=(x+1)^2+4\ge 4$

$f(x)=k^2+2k+7=(k+1)^2+6$

$\because\ k \ge 4\quad \therefore\ k+1 \ge 5 \ \Rightarrow\ (k+1)^2 \ge 25 \ \Rightarrow\ (k+1)^2+6 \ge 31$

即 $f(x) \ge 31\quad \therefore\ f(x)$之最小值為 31

17.$x \in \boldsymbol{R}$,則函數 $g(x) = (x-1)^2 + 2(x-2)^2 + 3(x-3)^2 + \cdots + 10(x-10)^2$ 有最小值時,x 之值為_______.

解答 7

解析 $g(x) = (1+2+3+\cdots+10)x^2 - 2(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)x + (1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3)$

$= 55x^2 - 2(\frac{10\times11\times21}{6})x + [\frac{10(11)}{2}]^2 = 55(x-7)^2 + 55^2 - 55\times49 = 55(x-7)^2 + 330$

$\therefore$ 當 $x = 7$ 時,$g(x)$ 有最小值為 330

【註】當 $x = 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots,\ \overbrace{10,\ 10,\ \cdots,\ 10}^{10個}$ 的算術平均數時,

即當 $x = 7$ 時 $g(x)$ 有最小值

18.有一條彈簧,當掛上重物時,彈簧拉長的長度與所掛的物體重量成一定比例,今以 30 公斤與 60 公斤的重物掛上後,彈簧長度分別為 60 公分與 100 公分,則以 42 公斤的重物掛上後,彈簧長度應為____________公分.

解答 76

解析 設彈簧長度 b 公分,當掛上 x 公斤重物時,伸長量為 ax

$\Rightarrow$ 彈簧總長 $f(x) = ax + b$ 而 $f(30) = 60$, $f(60) = 100$

$\Rightarrow\ a = \frac{4}{3}$, $b = 20\quad \therefore\ f(x) = \frac{4}{3}x + 20\ \therefore\ f(42) = \frac{4}{3}\times42 + 20 = 76$ 公分

19.若二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 圖形過 $A(-2,\ 11)$, $B(-1,\ 1)$, $C(2,\ -5)$ 三點,求

(1) $f(x) =$____________. (2)頂點為____________. (3)對稱軸為____________.

解答 (1) $2x^2 - 4x - 5$;(2) $(1,\ -7)$;(3) $x = 1$

解析 (1)$\because\ y = ax^2 + bx + c$ 圖形過 $A(-2,\ 11)$, $B(-1,\ 1)$, $C(2,\ -5)$

$$\therefore \begin{cases} 4a - 2b + c = 11 \cdots\cdots ① \\ a - b + c = 1 \cdots\cdots ② \\ 4a + 2b + c = -5 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} ①-② \Rightarrow 3a - b = 10 \\ ③-② \Rightarrow 3a + 3b = -6 \end{array} \ \Rightarrow\ \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases} \ \Rightarrow\ c = -5\quad \therefore\ f(x) = 2x^2 - 4x - 5$$

(2) $f(x) = 2x^2 - 4x - 5 = 2(x-1)^2 - 7\quad \therefore$頂點 $(1,\ -7)$

(3)對稱軸 $x = 1$

20.若二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的對稱軸為 $x = 1$,且圖形通過 $(-1,\ 1)$,$(2,\ -5)$,求 $f(x) =$__________.

解答 $2x^2 - 4x - 5$

解析 $\because$對稱軸 $x = 1\quad \therefore$設 $f(x) = a(x-1)^2 + k$

$\because$圖形過 $(-1,\ 1)\ (2,\ -5)\ \Rightarrow\ \begin{cases} a\times4 + k = 1 \\ a\times1 + k = -5 \end{cases}\ \therefore\ a = 2$, $k = -7$

$\therefore\ f(x) = 2(x-1)^2 - 7 = 2x^2 - 4x - 5$

21.將 $y = 2x^2 - 4x + 5$ 之圖形水平左移 3 單位,再上移 a 單位得 $y = 2x^2 + bx + 17$,求

(1) $a =$ ____________. (2) $b =$____________.

解答 (1)6;(2)8

解析 $y = 2x^2 - 4x + 5 = 2(x-1)^2 + 3$ 頂點 $(1,\ 3)$

左移 3 單位,上移 a 單位後,頂點為 $(1-3,\ a+3) = (-2,\ a+3)$

而 $y=2x^2+bx+17=2(x^2+\frac{b}{2}x)+17=2(x+\frac{b}{4})^2-\frac{b^2}{8}+17$

$\therefore$ 頂點為 $(-\frac{b}{4},\ -\frac{b^2}{8}+17)=(-2,\ a+3)$ $\therefore \begin{cases} -\frac{b}{4}=-2 \Rightarrow b=8 \\ -\frac{b^2}{8}+17=a+3 \Rightarrow a=-\frac{8^2}{8}+17-3=6 \end{cases}$

22.對任意實數 x， $f(x)=-2x^2+3x-k$ 函數值恆為負數，求實數 k 的範圍為________________ .

解答 $k>\frac{9}{8}$

解析 函數恆負 $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{領導係數} -2<0\text{（必成立）} \\ D=3^2-4\times(-2)(-k)<0 \Rightarrow 9-8k<0 \Rightarrow k>\frac{9}{8} \end{cases}$

23. $f(x)=-2x^2+3x-k$ （ k 為實數），若 $f(x)\ge 0$ 無解，求 k 的範圍為________________ .

解答 $k>\frac{9}{8}$

解析 $f(x)\ge 0$ 無解 $\Rightarrow$ 沒有 x 會使得 $f(x)\ge 0$

$\Rightarrow$ 所有 x 會使得 $f(x)<0$

$\Rightarrow$ $f(x)<0$ 恆成立

$\Rightarrow$ $D=3^2-4\times(-2)\times(-k)<0$

$\Rightarrow$ $k>\frac{9}{8}$

24.函數 $f(x)=\begin{cases} x+3，0\le x<2 \\ x^2+1，2\le x<4 \\ 25-2x，4\le x<11 \end{cases}$ ，則(1) $f(2)=$________________ . (2) $f(f(8))=$________________ .

解答 (1)5;(2)7

解析 (1) $f(2)=5$ (2) $f(f(8))=f(9)=7$

25.設 $y=-4x^2+3x+1$ 交 x 軸於 A， B 兩點，則

(1)頂點坐標________________ . (2) $\overline{AB}=$________________ .

解答 (1) $(\frac{3}{8},\ \frac{25}{16})$;(2) $\frac{5}{4}$

解析 (1) $y=-4[x^2-\frac{3}{4}x+(\frac{3}{8})^2-(\frac{3}{8})^2]+1=-4(x-\frac{3}{8})^2+\frac{25}{16}$ $\therefore$ 頂點 $(\frac{3}{8},\ \frac{25}{16})$

(2)令 $y=0$ $\Rightarrow$ $-4x^2+3x+1=0$ $\Rightarrow$ $4x^2-3x-1=0$ $\Rightarrow$ $x=1$ 或 $\frac{-1}{4}$

$\therefore \overline{AB}=1-(\frac{-1}{4})=\frac{5}{4}$

26.設 x，y 為實數，$2x-y=5$，則 x^2+y^2 的最小值為________________ .

解答 5

解析 $\because$ $2x-y=5$ $\therefore$ $y=2x-5$

$\Rightarrow$ $x^2+y^2=x^2+(2x-5)^2=5x^2-20x+25=5(x-2)^2+5$

$\therefore$ 當 $x=2$ 時，x^2+y^2 有最小值為 5

27.$f(x)$為線型函數，若 $-1\le f(2)\le 3$，$2\le f(5)\le 9$，則 $f(3)$的(1)最大值為______，(2)最小值為______ .

解答 (1)5;(2)0

解析 令 $f(x) = ax + b$

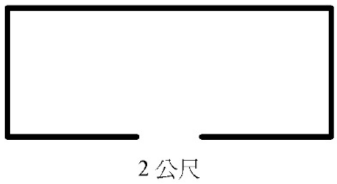
$\therefore\ -1 \le 2a + b \le 3$，$2 \le 5a + b \le 9$，

又 $f(3) = 3a + b$

設$(2a + b) \times m + (5a + b) \times n = 3a + b$

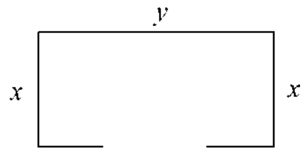
$\therefore \begin{cases} 2m+5n=3 \\ m+n=1 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} m=\dfrac{2}{3} \\ n=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow (-1) \times \dfrac{2}{3} + 2 \times \dfrac{1}{3} \le 3a + b \le 3 \times \dfrac{2}{3} + 9 \times \dfrac{1}{3} \quad \therefore\ 0 \le f(3) \le 5$

28.一農夫想用 66 公尺長之竹籬圍成一長方形菜圃，並在其中一邊正中央留著寬 2 公尺的出入口，如下圖示．此農夫所能圍成的最大面積為_______平方公尺．



解答 289

解析 如下圖，設長方形兩邊長 x 公尺，另兩邊長 y 公尺（含下方出入口 2 公尺）



則 $2x+2y-2=66$，即 $y=34-x$

由 $2<y<34$ 得 $0<x<32$

長方形面積 $=xy=x(34-x)=-(x^2-34x)=-(x-17)^2+289$

當 $x=17$ 時，長方形面積等於 289（平方公尺）最大

29.設 $A(0,0)$, $B(10,0)$, $C(10,6)$, $D(0,6)$ 為坐標平面上的四個點．如果直線 $y=mx+\dfrac{1}{2}$ 將四邊形 $ABCD$ 分成面積相等的兩塊，則實數 m 之值為____________．

解答 $\dfrac{1}{2}$

解析 設 $L: y=mx+\dfrac{1}{2}$，L 表過點 $(0,\ \dfrac{1}{2})$，斜率為 m 的直線，

因 L 與 y 軸的交點 M 坐標為 $(0,\ \dfrac{1}{2})$，L 與 $x=10$ 的交點 $N(10,\ 10m+\dfrac{1}{2})$

因 L 平分矩形 $ABCD$ 之面積，所以 $\overline{AM}=\overline{NC}$，即 $\dfrac{1}{2}=6-(10m+\dfrac{1}{2}) \Rightarrow m=\dfrac{1}{2}$．