高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：104.09.17					
範圍	數與數線(A)	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1. 化簡下列各式：

(1) $\sqrt{27}-3\sqrt{12}+\sqrt{\dfrac{3}{4}}=$________.

(2) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-2)(\sqrt{2}-\sqrt{3}+2)=$________.

(3) $(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})=$________.

答案：(1) $\dfrac{-5\sqrt{3}}{2}$ (2) $4\sqrt{3}-5$ (3)4

解析：(1)原式 $=3\sqrt{3}-6\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{-5\sqrt{3}}{2}$

(2)原式 $=[\sqrt{2}+(\sqrt{3}-2)][\sqrt{2}-(\sqrt{3}-2)]$

$=2-(\sqrt{3}-2)^2=2-(3-4\sqrt{3}+4)=4\sqrt{3}-5$

(3)原式 $=16-12=4$

2. 化簡下列各式：

(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{6})^3=$________.

(2) $(3-\sqrt{2})(2+\sqrt{18})=$________.

(3) $(3\sqrt{2}+\sqrt{6})^2=$________.

答案：(1) $21\sqrt{3}+15\sqrt{6}$ (2) $7\sqrt{2}$ (3) $24+12\sqrt{3}$

解析：(1)原式 $=3\sqrt{3}+3\cdot 3\sqrt{6}+3\sqrt{3}\cdot 6+6\sqrt{6}=21\sqrt{3}+15\sqrt{6}$

(2)原式 $=(3-\sqrt{2})(2+3\sqrt{2})=6+9\sqrt{2}-2\sqrt{2}-6=7\sqrt{2}$

(3)原式 $=18+6\sqrt{12}+6=24+12\sqrt{3}$

3. 試求下列各值：

(1) $(x-1)(x^3+x^2+x+1)=$________.

(2) $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)=$________.

(3) $(x^3+x^2+x+1)(x^3-x^2-x+1)=$________.

答案：(1) x^4-1 (2) x^5+1 (3) $x^6-x^4-x^2+1$

解析：(1)原式 $=(x^4+x^3+x^2+x)-(x^3+x^2+x+1)=x^4-1$

(2)原式 $=(x^5-x^4+x^3-x^2+x)+(x^4-x^3+x^2-x+1)=x^5+1$

(3)原式 $=[(x^3+1)+(x^2+x)][(x^3+1)-(x^2+x)]$

$=(x^3+1)^2-(x^2+x)^2=x^6+2x^3+1-(x^4+2x^3+x^2)=x^6-x^4-x^2+1$

4. (1)化簡：$(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^3+(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^3=$________.

(2)若 $x=\dfrac{\sqrt{7}}{7-\sqrt{7}}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{7}+1}$，則 $x^3-y^3=$________.

答案：(1)4　(2)$\frac{11}{54}$

解析：(1)原式$=\frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8}+\frac{1-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5}}{8}=2+2=4$

(2) $x=\frac{\sqrt{7}}{(\sqrt{7})^2-\sqrt{7}}=\frac{1}{\sqrt{7}-1}=\frac{\sqrt{7}+1}{6}$

$y=\frac{\sqrt{7}-1}{(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)}=\frac{\sqrt{7}-1}{6}$

$x-y=\frac{(\sqrt{7}+1)-(\sqrt{7}-1)}{6}=\frac{1}{3}$; $xy=\frac{(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)}{36}=\frac{1}{6}$

$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3(x\cdot y)(x-y)==(\frac{1}{3})^3+3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{11}{54}$

5. 試以分數表示：

(1)$1.\overline{54}=$________.

(2)$1.\overline{54}+0.8\overline{3}=$________.

答案：(1)$\frac{17}{11}$　(2)$\frac{157}{66}$

解析：(1)設 $x=1.\overline{54}$，則$100x=154.\overline{54}$

$\therefore 99x=153\Rightarrow x=\frac{153}{99}=\frac{17}{11}$

(2)設 $y=0.8\overline{3}$　則$100y=83.\overline{3}$，$10y=8.\overline{3}$

$\therefore 90y=75\Rightarrow y=\frac{75}{90}=\frac{5}{6}$

所求$=x+y=\frac{17}{11}+\frac{5}{6}=\frac{157}{66}$

6. 若$a=3-\sqrt{6}$，$b=2\sqrt{2}-\sqrt{7}$，$c=\sqrt{10}-\sqrt{5}$，則 a, b, c 之大小順序為________.

答案：$c>a>b$

解析：$a^2=9-6\sqrt{6}+6=15-6\sqrt{6}$

$b^2=8-4\sqrt{14}+7=15-4\sqrt{14}$

$c^2=10-2\sqrt{50}+5=15-10\sqrt{2}$

又$(6\sqrt{6})^2=216$

$(4\sqrt{14})^2=16\times14=224$

$(10\sqrt{2})^2=200$

故$c^2>a^2>b^2\Rightarrow c>a>b$

7. 試求下列各值：

(1)$(2-\sqrt{3})^{2009}(2+\sqrt{3})^{2010}=$________.

(2)$99\frac{2}{3}\times100\frac{1}{3}=$________.

(3)$22.5^2-22.5\times5+2.5^2=$________.

答案：(1)$2+\sqrt{3}$　(2)$\frac{89999}{9}$　(3)400

解析：(1)原式$=(2+\sqrt{3})[(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})]^{2009}=(2+\sqrt{3})(4-3)^{2009}=2+\sqrt{3}$

(2)原式$=(100-\frac{1}{3})(100+\frac{1}{3})=10000-\frac{1}{9}=\frac{89999}{9}$

(3)原式$=22.5^2-2\times22.5\times2.5+2.5^2=(22.5-2.5)^2=20^2=400$

8. 若$-2\le a\le 3,\ 1\le b\le 4$，則(1)$ab$ 的範圍______.(2)$\dfrac{a}{b}$的範圍為______.

答案：(1)$-8\le ab\le 12$　(2)　$-2\le \dfrac{a}{b}\le 3$

解析：(1)$-2\le a\le 3,\ 1\le b\le 4\Rightarrow -8\le ab\le 12$

(2)$-2\le a\le 3,\ \dfrac{1}{4}\le\dfrac{1}{b}\le 1\Rightarrow -2\le\dfrac{a}{b}\le 3$

9. 將$\dfrac{4}{7}$化為小數，小數點後第 100 位數字為__________

答案：4

解析：$\dfrac{4}{7}=0.571428571428\cdots=0.\overline{571428}$　　$\because 100\div 6=16\cdots 4$，$\therefore$所求$=4$

10. 設$a=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$，則$a^3-\dfrac{1}{a^3}$之值為__________．

答案：14

解析：$a=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2+2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$

$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1\Rightarrow a-\dfrac{1}{a}=\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)=2$

$\therefore a^3-\dfrac{1}{a^3}=(a-\dfrac{1}{a})^3+3(a\cdot\dfrac{1}{a})(a-\dfrac{1}{a})=(2)^3+3\times1\times2=14$

11. a,b均為正數，若$ab=20$，且$a=a_0$時，$5a+3b$有最小值m，則數對$(a_0,m)=$__________．

答案：$(2\sqrt{3},20\sqrt{3})$

解析：由算幾不等式

得$\dfrac{5a+3b}{2}\ge\sqrt{15ab}=10\sqrt{3}\Rightarrow 5a+3b\ge 20\sqrt{3}$

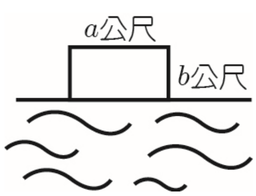
$\therefore 5a+3b$的最小值為$20\sqrt{3}$

當等號成立時，$5a=3b=10\sqrt{3}\Rightarrow a=2\sqrt{3}$　故數對$(a_0,m)=(2\sqrt{3},20\sqrt{3})$

12. 小明用鐵絲網要在河岸圍出一塊長方形的花圃，若沿河岸的一邊不圍，若小明要花圃的面積為 450 平方公尺，則至少要__________公尺的鐵絲網．

答案：60

解析：如圖，設所圍長方形的長，寬分別為a,b公尺 依題意，$ab=450$



由算幾不等式

得$\dfrac{a+2b}{2}\ge\sqrt{2ab}\Rightarrow a+2b\ge 2\sqrt{900}=60$　$\therefore$所求最少要 60 公尺的鐵絲網

13. 若$\sqrt{41-12\sqrt{5}}=x+y$，其中x為整數，且$0<y<1$，則$y-\dfrac{4}{y}=$__________．

答案：$-2\sqrt{5}$

解析：$\sqrt{41-12\sqrt{5}}=\sqrt{41-2\sqrt{180}}=\sqrt{(\sqrt{36})^2+(\sqrt{5})^2-2\sqrt{36\times 5}}=\sqrt{(\sqrt{36})^2-(\sqrt{5})^2}=6-\sqrt{5}=3.\cdots$

$\therefore x=3, y=(6-\sqrt{5})-3=3-\sqrt{5}$

$y-\dfrac{4}{y}=(3-\sqrt{5})-\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}=(3-\sqrt{5})-\dfrac{4(3+\sqrt{5})}{4}=-2\sqrt{5}$

14. 設x，y為有理數，若$(x+2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=6-y\sqrt{3}$，則$x=$__________，$y=$__________．

答案：6；2

解析：$(x+2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2x-6-x\sqrt{3}+4\sqrt{3}=6-y\sqrt{3}$

$\because x$，$y\in\mathbb{Q}$，$\therefore\begin{cases}2x-6=6\\-x+4=-y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=6\\y=2\end{cases}$

15. 設a,b為實數，且$|a-b+3|+(3a-2b+4)^2=0$，則數對$(a,b)=$__________．

答案：$(2,5)$

解析：$\begin{cases}a-b+3=0\\3a-2b+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=5\end{cases}$ 故數對$(a,b)=(2,5)$

16. 設$a=\sqrt{7+\sqrt{47}}$，則a在哪兩個連續整數之間？答：__________．

答案：$3<a<4$

解析：$a=\sqrt{7+\sqrt{47}}<\sqrt{7+7}<4$，且$a=\sqrt{7+\sqrt{47}}>\sqrt{7+6}>3$ 故$3<a<4$

17. 設$p=(a^2-22a+121)(a^2-2a+137)$，其中$a$為正整數，若$p$為質數，則$p=$______。

答案：257

解析：$a^2-2a+137=(a-1)^2+136>1$且p為質數

$\therefore a^2-22a+121=1\Rightarrow a=10$或$12$

(1)當$a=10$則$p=217=7\times 31$不為質數

(2)當$a=12$則$p=257$

$\therefore p=257$

18. 設a, b為有理數，且$(a+b\sqrt{2})(1+2\sqrt{2})=-1+5\sqrt{2}$，則$a=$______，$b=$______.

答案：$3,-1$

解析：$a+b\sqrt{2}=\dfrac{-1+5\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}\times\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}=\dfrac{21-7\sqrt{2}}{7}=3-\sqrt{2}$ $\quad\therefore a=3,b=-1$

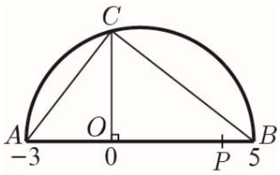
19. 設x,y是有理數，且$\sqrt{\dfrac{7}{6}+\sqrt{\dfrac{4}{3}}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$，其中$x>0,y>0$，則$x=$______，$y=$______.

答案：$\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{2}$

解析：$\sqrt{\frac{7}{6}+\sqrt{\frac{4}{3}}}=\sqrt{\frac{7}{6}+\sqrt{\frac{48}{36}}}=\sqrt{\frac{7+2\sqrt{12}}{6}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{3}{6}}+\sqrt{\frac{4}{6}}=\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\therefore\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=\frac{2}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{2}{3}\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$

20. 設數線上三點 $A(-3),B(5),O(0)$，以 $\overline{AB}$ 為直徑做一半圓，過原點 O 作數線的垂線交半圓於 C，再以 O 為圓心，$\overline{OC}$ 為半徑畫弧，交數線右側一點 P，則點 P 的坐標為__________。

答案：$\sqrt{15}$



解析：如圖，$\overline{OA}=3,\overline{OB}=5$ $\overline{OC}\perp\overline{AB}$

$\therefore\overline{OP}=\overline{OC}=\sqrt{\overline{OA}\times\overline{OB}}=\sqrt{3\times 5}=\sqrt{15}$ 故點 P 的坐標為 $\sqrt{15}$

21. 化簡 $\sqrt{6-\sqrt{35}}$ 為__________。

答案：$\frac{\sqrt{14}-\sqrt{10}}{2}$

解析：$\sqrt{6-\sqrt{35}}=\sqrt{\frac{12-2\sqrt{35}}{2}}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{10}}{2}$

22. 有一最簡正分數，其分子與分母之和為 80，將其化為小數並用四捨五入法計算後得 0.7，則此最簡分數為______.

答案：$\frac{33}{47}$

解析：設分子 a 分母 b

$a+b=80$

$0.65\le\frac{a}{b}<0.75\Rightarrow 0.75b>a\ge 0.65b$

$\Rightarrow 1.75b>a+b\ge 1.65b\Rightarrow 1.75b>80\ge 1.65b$

$\Rightarrow 45.7\cdots<b<48.4\cdots\Rightarrow b=46$(不合), 47, 48(不合)

$\therefore b=47,a=33,$ 分數為 $\frac{33}{47}$

23. 設 $a=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1},b=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$，試求 $\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}$ 的值為_________。

答案：52

解析：$a=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1},b=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1},ab=1$

$a+b=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{8}{2}=4$

$\therefore\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}=\frac{b^3+a^3}{ab}=a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=64-12=52$

24. 設 a,b,c,d 均為實數，若 $a^2+b^2+c^2+d^2+7\le 2a-4b-2c+2d$，則 $a+b+c+d$ 之值為_________。

答案：-1

解析：$a^2+b^2+c^2+d^2+7\le 2a-4b-2c+2d$

$\Rightarrow a^2-2a+b^2+4b+c^2+2c+d^2-2d+7\le 0$

$\Rightarrow (a^2-2a+1)+(b^2+4b+4)+(c^2+2c+1)+(d^2-2d+1)\le 0$

$\Rightarrow (a-1)^2+(b+2)^2+(c+1)^2+(d-1)^2\le 0$

$\because a,b,c,d$ 均為實數 $\therefore \begin{cases} a-1=0 \\ b+2=0 \\ c+1=0 \\ d-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-1 \\ d=1 \end{cases}$

$\therefore a+b+c+d=1-2-1+1=-1$

25. 設 $x>0, y>0$，且 $2x+5y=21$，求 x^2y 之最大值為__________，此時數對 $(x,y)=$__________．

答案：$\dfrac{343}{5}, (7,\dfrac{7}{5})$

解析：由算幾不等式

得 $\dfrac{x+x+5y}{3}\ge \sqrt[3]{5x^2y} \Rightarrow 7\ge \sqrt[3]{5x^2y}$

$\Rightarrow 5x^2y\le 343 \Rightarrow x^2y\le \dfrac{343}{5}$ $\therefore x^2y$ 的最大值為 $\dfrac{343}{5}$

當等號成立時 $x=x=5y=7 \Rightarrow x=7, y=\dfrac{7}{5}$

26. 若 a 為正整數，且 $\dfrac{5a+12}{2a-3}$ 亦為正整數，則 $a=$______。

答案：2,3,8,21

解析：$2a-3 \mid 5a+12 \cdots\cdots ①$

$2a-3 \mid 2a-3 \cdots\cdots ②$

$\therefore 2a-3 \mid 2(5a+12)-5(2a-3) \Rightarrow 2a-3 \mid 39$

$\therefore 2a-3=1,3,13,39$

$a=2,3,8,21$

27. 若正實數 a 的小數部分為 b，若 $a^2+3b^2=20$，則 $a-b=$______________。

答案： 4

解析：$0<b<1 \Rightarrow 0<b^2<1 \Rightarrow 0<3b^2<3 \cdots\cdots ①$

$a^2+3b^2=20 \Rightarrow 17<a^2<20 \cdots\cdots ②$

$\therefore \sqrt{17}<a<\sqrt{20} \Rightarrow a=4+b$

$\therefore a^2+3b^2=20 \Rightarrow (4+b)^2+3b^2=20$

$b^2+2b-2=0 \Rightarrow \begin{cases} b=-1+\sqrt{2} \\ a=3+\sqrt{2} \end{cases}$ $\therefore a-b=4$