高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：103.06.09					
範圍	4-2 橢圓	班級	二年____班	姓名	
		座號			

1.橢圓 $4x^2+9y^2+16x-18y-11=0$ 的

(1)中心坐標為____________．(2)長軸長 $=$____________．(3)短軸長 $=$____________．

解答 (1)$(-2，1)$;(2)6;(3)4

解析 $4x^2+9y^2+16x-18y-11=0 \Leftrightarrow 4(x+2)^2+9(y-1)^2=36 \Leftrightarrow \dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$，

此橢圓的中心$(-2，1)$，長軸長 $=6$，短軸長 $=4$．

2.已知一橢圓過點$(-1，\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，且兩焦點為$(\sqrt{3}，0)$，$(-\sqrt{3}，0)$，則

(1)此橢圓的方程式為____________．(2)長軸長 $=$____________．

解答 (1)$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$;(2)4

解析 橢圓兩焦點為$(\sqrt{3}，0)$，$(-\sqrt{3}，0)$，其中點$(0，0)$就是橢圓中心，

設此橢圓方程式為$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，又點$(-1，\dfrac{\sqrt{3}}{2})$在橢圓上，

$a^2-b^2=3$ 且 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1$，$\begin{cases} a^2=b^2+3 \\ 4b^2+3a^2=4a^2b^2 \end{cases}$，得 $4b^2+3(b^2+3)=4(b^2+3)b^2$，

即 $4b^4+5b^2-9=0$，可得 $b^2=1$，$a^2=4$，橢圓方程式$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$，長軸長 $=2a=4$．

3.若橢圓 Γ_1：$\dfrac{x^2}{90}+\dfrac{y^2}{15}=1$ 與 Γ_2：$\dfrac{x^2}{a^2-5}+\dfrac{y^2}{2a}=1$ 焦點相同，則

(1) Γ_2 的短軸長 $=$____________．(2)設點 $P(\sqrt{19}，t)$在 Γ_2 上且 $t>0$，則 $t=$____________．

解答 (1)$4\sqrt{5}$;(2)4

解析 Γ_1：$\dfrac{x^2}{90}+\dfrac{y^2}{15}=1$ 與 Γ_2：$\dfrac{x^2}{a^2-5}+\dfrac{y^2}{2a}=1$ 焦點相同，則$(a^2-5)-2a=90-15$，

可得 $a=10$ 或 $a=-8$（但 $a>0$），所以 Γ_2：$\dfrac{x^2}{95}+\dfrac{y^2}{20}=1$，短軸長 $=2\sqrt{20}=4\sqrt{5}$，

當點 $P(\sqrt{19}，t)$在 Γ_2 上時，$\dfrac{19}{95}+\dfrac{t^2}{20}=1$，即 $t^2=20(\dfrac{4}{5})=16$，$t=\pm 4$，又 $t>0$，所以 $t=4$．

4.橢圓$\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}=10$，試求：

(1)長軸長 $=$____________． (2)在 y 軸上之投影長 $=$____________．

解答 (1)10;(2) 6

解析 $F'(-4,1)$，$F(4,1) \Rightarrow$ 中心$(0,1)$，$\therefore c=4$，$a=5 \Rightarrow b=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

故長軸長 $=2a=10$，在 y 軸上之投影長 $=2b=6$．

5.橢圓 $9x^2+4y^2+54x-16y-47=0$，試求：

(1)焦點坐標為____________．　(2)內接正方形面積為____________．

解答 (1) $(-3, 2\pm 2\sqrt{5})$;(2) $\dfrac{576}{13}$

解析 $9x^2+4y^2+54x-16y-47=0 \Rightarrow 9(x+3)^2+4(y-2)^2=144 \Rightarrow \dfrac{(x+3)^2}{16}+\dfrac{(y-2)^2}{36}=1$，

$\therefore$中心$(-3,2)$，$a=6$，$b=4$，又 $c^2=a^2-b^2=20 \Rightarrow c=2\sqrt{5}$，

$\therefore$焦點$(-3, 2\pm 2\sqrt{5})$，又內接正方形面積為$\dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{4\times 36\times 16}{36+16}=\dfrac{576}{13}$．

6.橢圓中心$(2,1)$，長軸在直線 $x=2$ 上，過此橢圓長軸之一頂點的二個焦半徑為 2 與 8，試求：

(1)此橢圓之方程式為____________．　(2)此橢圓之二焦點為____________．

解答 (1) $\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$;(2) $(2,-2)$，$(2,4)$

解析 $\begin{cases} a+c=8 \\ a-c=2 \end{cases} \Rightarrow a=5$，$c=3$，$\therefore b=4$，

$\therefore$橢圓 Γ：$\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$，二焦點為$(2,-2)$，$(2,4)$．

7.設 $x^2+2y^2-2x+8y+k=0$，試求：

(1)表一點時，此點坐標為____________．　(2)表一橢圓時，k 值之範圍為____________．

解答 (1) $(1,-2)$;(2) $k<9$

解析 $x^2+2y^2-2x+8y+k=0 \Rightarrow (x^2-2x+1)+2(y^2+4y+4)=-k+9$

$\Rightarrow (x-1)^2+2(y+2)^2=-k+9$，$\therefore k=9$ 時，表點$(1,-2)$；$k<9$ 時，表一橢圓．

8.設 $\dfrac{(x+1)^2}{t+1}+\dfrac{(y+1)^2}{3-t}=1$ 表長軸在直線 $y+1=0$ 上之橢圓，則 t 之範圍為____________．

解答 $1<t<3$

解析 $t+1>3-t>0 \Rightarrow 1<t<3$．

9.與橢圓 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$ 共焦點且過點$(3,3)$之橢圓方程式為____________．

解答 $\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{(y-1)^2}{10}=1$

解析 〈解法一〉

設橢圓為$\dfrac{x^2}{9+k}+\dfrac{(y-1)^2}{4+k}=1$，則將(3，3)代入，$\therefore \dfrac{9}{9+k}+\dfrac{4}{4+k}=1$

$\Rightarrow 36+9k+36+4k=36+9k+4k+k^2$

$\Rightarrow k^2=36 \Rightarrow k=6$ 或 -6（不合），

故$\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{(y-1)^2}{10}=1$．

〈解法二〉

設橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-1)^2}{b^2}=1$，$(3,\ 3)$代入，得$\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1$……①，且$c^2=a^2-b^2=5$……②，

解①②得$b^2=10$，$a^2=15$，$\therefore \dfrac{x^2}{15}+\dfrac{(y-1)^2}{10}=1$．

10.若有一動點$P(x，y)$到$A(3，4)$，$B(3，12)$兩點距離的和恆為10，則
(1) $P(x，y)$點的圖形軌跡為__________（拋物線、雙曲線⋯）. (2)此圖形方程式為__________．

解答 (1)橢圓;(2)$\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y-8)^2}{25}=1$

解析 動點$P(x,\ y)$到$A(3，4)$，$B(3，12)$兩點距離的和恆為10，

由橢圓的定義知：此動點的圖形軌跡為橢圓，

中心$(3，\dfrac{4+12}{2})=(3，8)$，得$c=4$，$2a=10$，$a=5 \Rightarrow b=3$，

$\therefore$橢圓方程式為$\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y-8)^2}{25}=1$．

11.已知一橢圓的兩焦點(5，1)，(－1，1)，長軸長為$2\sqrt{13}$，則此橢圓方程式為__________．

解答 $\dfrac{(x-2)^2}{13}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

解析 橢圓兩焦點(5，1)，(－1，1)，則中心(2，1)，$c=\sqrt{(5-2)^2+(1-1)^2}=3$，

長軸長$2a=2\,6\sqrt{5} \Rightarrow a=\sqrt{13}$，$\therefore b^2=a^2-c^2=13-9=4$，

$\therefore$橢圓方程式為$\dfrac{(x-2)^2}{13}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$．

12.已知一橢圓之一焦點為$(-2,3)$，一長軸頂點為$(7,3)$，且短軸長為6，則此橢圓方程式為__________．

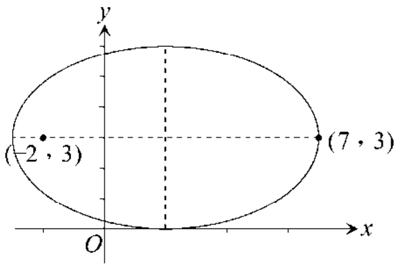
解答 $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

解析 $2b=6$，$b=3$，$b^2=a^2-c^2 \Rightarrow 9=(a+c)(a-c)$，若$a-c=9$得$a+c=1$（不合），

所以$a-c=1$，$a+c=9 \Rightarrow a=5$，$c=4$，

設所求為$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$，則$(h，k)=(7-a，3)=(7-5，3)=(2，3)$，

所求為$\dfrac{(x-2)^2}{5^2}+\dfrac{(y-3)^2}{3^2}=1$．



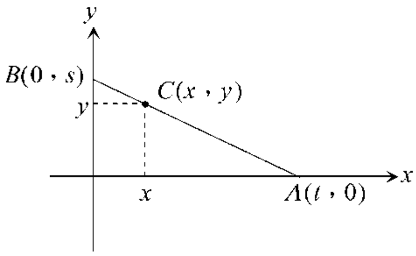
13.若線段$\overline{AB}$之長為 5，其上一點 C 使$\overline{AC}$ ：$\overline{CB}=3:2$，當 A 在 x 軸上移動，B 在 y 軸上移動，則 (1)動點 C 所形成的圖形方程式為____________.(2)此圖形上相異兩點距離的最大值 ＝____________.

解答 (1)$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$;(2)6

解析 如下圖，設 $A(t,\ 0)$，$B(0,\ s)$，$C(x,\ y)$，因為$\overline{AC}$ ：$\overline{CB}$ $=3:2$，所以$x=\dfrac{2}{5}t$，$y=\dfrac{3}{5}s$，

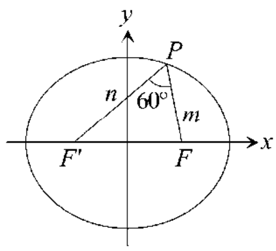
即$t=\dfrac{5}{2}x$，$s=\dfrac{5}{3}y$，又$\overline{AB}=5=\sqrt{t^2+s^2}$ ，所以$t^2+s^2=25$，亦即$\dfrac{25}{4}x^2+\dfrac{25}{9}y^2=25$，

點 C 的圖形為方程式$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$的圖形橢圓，橢圓上相異兩點最大距離為長軸的長 $=6$．



14.$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{18}=1$上一點 P 與兩焦點 F，F'夾角為 60 度，求△PFF'之面積____________．

解答 $6\sqrt{3}$



解析 橢圓$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{18}=1$，$\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}$ ，$\overline{PA}$，$\therefore c=\sqrt{a^2-b^2}\Rightarrow$，

$\therefore\ \overline{FF'}=2\sqrt{7}$ ，

設$\overline{PF}=m$，$\overline{PF'}=n$，又$\angle FPF'=60°$，$m+n=2a=10$，

$\therefore(2\sqrt{7})^2=m^2+n^2-2mn\cdot\cos 60°\Rightarrow 28=m^2+n^2-mn=(m+n)^2-3mn$

$\Rightarrow 28=10^2-3mn\Rightarrow mn=24$，$\therefore$△$PFF'$面積$=\dfrac{1}{2}mn\sin 60°=\dfrac{1}{2}\cdot 24\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$．

15.△ABC 中，已知 $A(-1,\ -2)$，$B(5,\ -2)$，若△ABC 之周長為 16，則點 C 之軌跡在一個圓錐曲線 Γ 上，Γ 的方程式為____________（化成標準式）．

解答 $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y+2)^2}{16}=1$

解析 $\overline{AB}=6$，設 $C(x，y)$，則 $\overline{AC}+\overline{BC}+\overline{AB}=16\Rightarrow\overline{AC}+\overline{BC}=10$，

$\therefore\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y+2)^2}=10$

$\Rightarrow\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=10-\sqrt{(x-5)^2+(y+2)^2}$

$\Rightarrow(x+1)^2+(y+2)^2=100-20\sqrt{(x-5)^2+(y+2)^2}+(x-5)^2+(y+2)^2$

$\Rightarrow 10\sqrt{(x-5)^2+(y+2)^2}=-6x+62\Rightarrow 100[(x-5)^2+(y+2)^2]=(-6x+62)^2$

$\Rightarrow 16x^2+25y^2-64x+100y-236=0\Rightarrow\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y+2)^2}{16}=1$．

16.設二定點 $F(5，2)$，$F'(-1，2)$，以 F'為中心，10 單位長為半徑畫圓，令 K 為此圓上的動點，P 為 $\overline{KF}$ 中垂線與直線 $\overleftrightarrow{KF'}$ 的交點，則 K 在圓上轉一周時，P 點的軌跡方程式為____________．

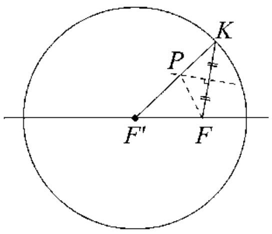
解答 $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$

解析 $\because\overline{FF'}=6<10$，$\therefore F$ 在圓內，又因為 P 為 $\overline{KF}$ 中垂線與 $\overleftrightarrow{KF'}$ 之交點，

$\therefore\overline{PF}=\overline{PK}\Rightarrow\overline{PF}+\overline{PF'}=\overline{PK}+\overline{PF'}=\overline{F'K}=10$，

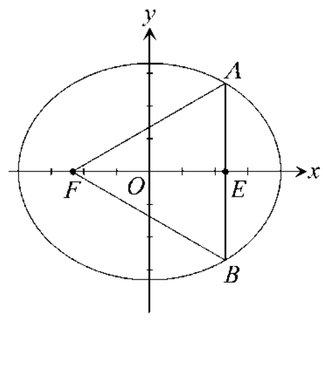
軌跡為以 F，F'為二焦點，長軸長 $=10$ 的橢圓，中心$(\dfrac{-1+5}{2}，\dfrac{2+2}{2})=(2，2)$，

$a=5$，$c=3\Rightarrow b=4$，故方程式為 $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$．



17.設橢圓 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{k}=1$ 長軸在 x 軸上，E，F 為其兩焦點，$\overline{AB}$ 為過 E 的線段，且垂直於長軸，交橢圓於 A，B 兩點．若$\triangle ABF$ 為正三角形，求 k 之值為____________．

解答 $\dfrac{32}{3}$

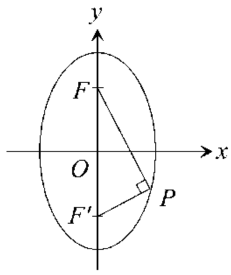


解析 橢圓 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{k}=1$，$a^2=16$，$a=4$，$b^2=k$，$\therefore c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-k}$，

$\because\triangle ABF$ 為正三角形，$\therefore 2a=8=\overline{AF}+\overline{AE}=\overline{AF}+\dfrac{1}{2}\overline{AF}$，$\therefore\overline{AF}=\dfrac{16}{3}$，

$\therefore$ 正三角形之高 $=2\sqrt{16-k}=\overline{AF}\sin 60^\circ=\dfrac{16}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 16-k=\dfrac{16}{3}\Rightarrow k=\dfrac{32}{3}$.

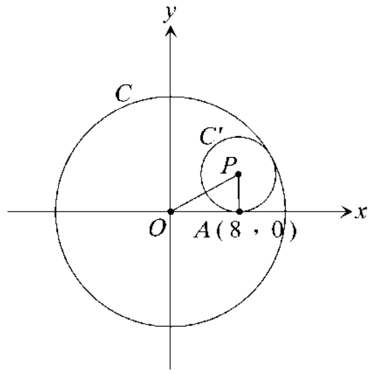
18.設 P 為橢圓 $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 上的一點,兩焦點 F,F' 在 y 軸上且 $\overline{FF'}=10$,如果 $\overline{PF}=2\overline{PF'}$ 且 $\angle FPF'=90^\circ$,則此橢圓長軸長為____________ .



解答 $6\sqrt{5}$

解析 $2c=\overline{FF'}=10\Rightarrow c=5$,設 $\overline{PF'}=k$,則 $\overline{PF}=2\overline{PF'}=2k$,又 $\angle FPF'=90^\circ$,
故 $4k^2+k^2=(2c)^2=100\Rightarrow k^2=20$,
$\therefore$ 長軸長 $=2a=\overline{PF}+\overline{PF'}=3k=3\sqrt{20}=6\sqrt{5}$.

19.圓 C:$x^2+y^2=100$,$A(8,0)$,動圓 C' 恆過 $A(8,0)$ 且與圓 C 相切,若圓 C' 之圓心 P,試求 P 之軌跡 Γ 之方程式____________ .



解答 $\dfrac{(x-4)^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

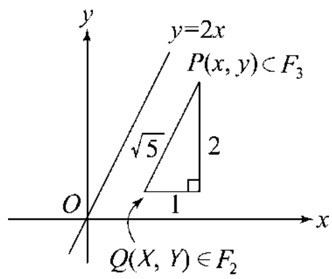
解析 C:$x^2+y^2=10^2$,圓心為 $O(0,0)$,半徑 $=10$,
圓 C' 之圓心為 P,半徑為 r,
又與圓 C 相內切,$\therefore$ 連心距 $\overline{PO}=10-r$,
則 $\overline{PA}+\overline{PO}=r+(10-r)=10>\overline{AO}=8$,
P 之軌跡為以 $A(8,0)$,$O(0,0)$ 為兩焦點,長軸長為 10 之橢圓,
即 P 之軌跡為 $\dfrac{(x-4)^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

32.平面上有三個全等的橢圓 F_1,F_2,F_3;其中 F_1,F_2 對 $x=y$ 對稱,F_3 是將 F_2 平行 $y=2x$ 之直線向右上方移動 $\sqrt{5}$ 單位.已知 F_3 之方程式為 $4x^2+y^2+8x-10y+25=0$,則
(1) F_2 之方程式為____________ . (2) F_1 之方程式為____________ .

解答 (1) $4x^2+y^2+16x-6y+21=0$;(2) $x^2+4y^2-6x+16y+21=0$

解析 (1)設 $P(x,y)$ 為 F_3 上一點,$Q(X,Y)$ 為 F_2 上一點且 $\overline{QP}=\sqrt{5}$, $\overrightarrow{QP}=(1,2)$,

如圖,則 $\begin{cases}x-X=1\\y-Y=2\end{cases}\Rightarrow(x,y)=(X+1,Y+2)$ 代入 F_3,

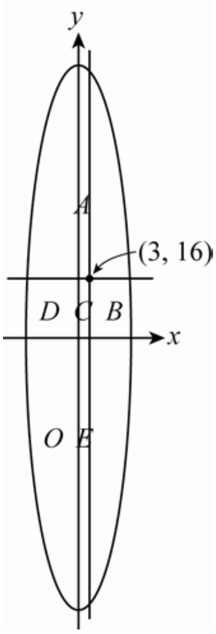


得 $4(X+1)^2+(Y+2)^2+8(X+1)-10(Y+2)+25=0$
$\Rightarrow F_2$:$4X^2+Y^2+16X-6Y+21=0$.
(2) F_1,F_2 對 $x=y$ 對稱,將 F_2 中的 x,y 互換得 F_1 之方程式為
$4y^2+x^2+16y-6x+21=0$,即 $x^2+4y^2-6x+16y+21=0$.

20.設橢圓 $\Gamma:\dfrac{(x-3)^2}{98^2}+\dfrac{(y-16)^2}{2009^2}=1$,且其內部於第一、二、三、四象限內所圍區域面積依次為 R_1,R_2,R_3,R_4,則 $R_1-R_2+R_3-R_4=$____________ .

解答 192

解析 $\Gamma:\dfrac{(x-3)^2}{98^2}+\dfrac{(y-16)^2}{2009^2}=1$，其圖形如下，



且令 A， B， C， D， E 表圖中各區域面積，S 為橢圓面積，

依題意 $R_1=\dfrac{S}{4}+A+B+C$， $R_2=\dfrac{S}{4}-A+D$， $R_3=\dfrac{S}{4}-C-D-E$， $R_4=\dfrac{S}{4}-B+E$，

$\therefore R_1-R_2+R_3-R_4=2A+2B-2D-2E$

$=2(C+E)+2(C+D)-2D-2E$

$=4C=4\times3\times16=192$.

21.橢圓$\sqrt{x^2+y^2-6x-4y+13}+\sqrt{x^2+y^2+2x-4y+5}=8$之短軸長為____________ .

解答 $4\sqrt{3}$

解析 $\sqrt{x^2+y^2-6x-4y+13}+\sqrt{x^2+y^2+2x-4y+5}=8$

$\Rightarrow\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=8$，

表焦點為 $F_1(3，2)$及 $F_2(-1，2)$之橢圓，其中長軸長 $2a=8\Rightarrow a=4$，

$\overline{F_1F_2}=3-(-1)=4=2c\Rightarrow c=2$，又 $b^2=a^2-c^2=4^2-2^2=12$，$\therefore b=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ 短軸長為 $2b=4\sqrt{3}$.

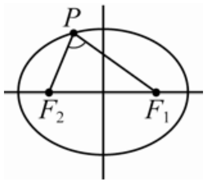
22.設橢圓$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$的焦點為 F_1，F_2，若 P 為橢圓上的一點，滿足 $\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=2$，則 $\cos(\angle F_1PF_2)$ =____________ .（化為最簡分數）

解答 $\dfrac{1}{5}$

解析　$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \Rightarrow a=4$，$b=3$，$\therefore c=\sqrt{7}$，

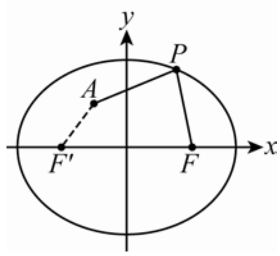
$\because \overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a=8$，$\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=2$，

$\therefore \overline{PF_1}=5$，$\overline{PF_2}=3$，由餘弦定理，



$\cos(\angle F_1PF_2)=\dfrac{\overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2-\overline{F_1F_2}^2}{2\times\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}}=\dfrac{25+9-(2\sqrt{7})^2}{2\times5\times3}=\dfrac{1}{5}$．

23.已知 P 為橢圓 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$ 上的一動點，若 $A(-3，4)$為橢圓內一點，F 為右焦點，則 $\overline{PF}+\overline{PA}$ 的最小值為____________．



解答　15

解析　$\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1 \Rightarrow a=10$，$b=8$，$\therefore c=6$，

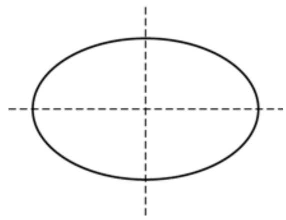
令 $F(6，0)$，$F'(-6，0)$，

$\because \overline{PF}+\overline{PA}+\overline{AF'}\ge\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$（此時 P，A，F'共線），

$\therefore \overline{PF}+\overline{PA}\ge 2a-\overline{AF'}=20-5=15$，即最小值為 15．

24.在坐標平面上，橢圓 $x^2+4y^2+8x-ky-5=0$ 的圖形對稱於直線 $y=2$，則 k 值為____________．

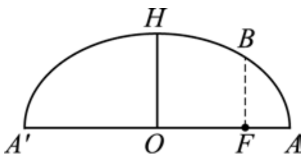
解答　16



解析　橢圓 $(x+4)^2+4(y-\dfrac{k}{8})^2=21+\dfrac{k^2}{16}$ 的對稱中心 $(-4,\dfrac{k}{8})$ 在直線 $y=2$ 上，

$\dfrac{k}{8}=2$，得 $k=16$．

25.有一座側看為半橢圓形的大橋，已知全長 $\overline{AA'}=50$ 公尺，設橋中心點 O，鋼架的最高點 H 時，$\overline{OH}=15$ 公尺，則距離 A 點 5 公尺的 F 點處，鋼架的高度為_______公尺．



解答　9

解析　坐標平面上設 $O(0,0)$，$A(25,0)$，$H(0,15)$，得橢圓方程式為 $\dfrac{x^2}{625}+\dfrac{y^2}{225}=1$，

因 $\overline{OF}=\overline{OA}-\overline{AF}=20$，設 $B(20,b)$，代入橢圓方程式

$\dfrac{400}{625}+\dfrac{b^2}{225}=1$，得 $b=9$，知 F 處鋼架的高度為 9 公尺．

26.在一長軸長 40 公尺，短軸長 20 公尺之橢圓形軌道上，發訊器放置在短軸端點不動，軌道車在軌道上任意移動．求發訊器與軌道車的最大距離為____________公尺．

解答　$\dfrac{40}{3}\sqrt{3}$

解析　建立坐標，令橢圓 $\dfrac{x^2}{20^2}+\dfrac{y^2}{10^2}=1$，發訊器在 $A(0，10)$，

令 $P(20\cos\theta, 10\sin\theta)$，$0 \le \theta < 2\pi$，

則 $\overline{AP}^2 = (20\cos\theta)^2 + (10\sin\theta - 10)^2 = 400\cos^2\theta + 100\sin^2\theta - 200\sin\theta + 100$

$= 400(1-\sin^2\theta) + 100\sin^2\theta - 200\sin\theta + 100 = -300\sin^2\theta - 200\sin\theta + 500$

$= -300(\sin\theta + \dfrac{1}{3})^2 + \dfrac{1600}{3}$，

當 $\sin\theta = -\dfrac{1}{3}$ 時，$\overline{AP}^2$ 有最大值 $\dfrac{1600}{3}$，即 $\overline{AP} = \sqrt{\dfrac{1600}{3}} = \dfrac{40}{\sqrt{3}} = \dfrac{40}{3}\sqrt{3}$.