

高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：103.05.26				
範圍	4-1 拋物線	班級	二年__班	姓名
		座號		

1.若兩拋物線 $y = 2x^2 + (2a - 4)x + b$ 與 $y = 3x^2 + 6x - 9$ 的頂點重合，則
 (1)數對 $(a, b) =$ _____ . (2)兩拋物線的對稱軸方程式為 _____ .

解答 (1)(4, -10);(2) $x = -1$

解析 $y = 2x^2 + (2a - 4)x + b = 2(x + \frac{a-2}{2})^2 + b - \frac{(a-2)^2}{2}$,

$$y = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x + 1)^2 - 12,$$

兩拋物線的頂點分別為 $(-\frac{a-2}{2}, b - \frac{(a-2)^2}{2})$ 與 $(-1, -12)$,

$$\text{當兩頂點重合時, } \begin{cases} -\frac{a-2}{2} = -1 \\ b - \frac{(a-2)^2}{2} = -12 \end{cases}, \text{ 即 } a = 4, b = -12 + 2 = -10,$$

兩拋物線的對稱軸也重合，方程式為 $x = -1$ ， $(a, b) = (4, -10)$ ，對稱軸方程式為 $x = -1$.

2.設拋物線 Γ 的頂點為 $(1, 4)$ ，準線為 $2x + 1 = 0$ ，則

(1) Γ 的方程式為 _____ .

(2)若拋物線 Γ' 與 Γ 對稱於 y 軸，則 Γ' 的方程式為 _____ .

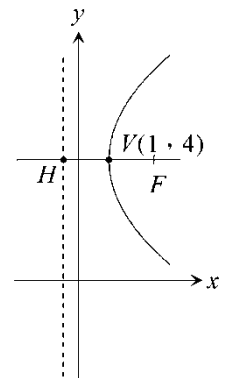
解答 (1) $(y - 4)^2 = 6(x - 1)$; (2) $(y - 4)^2 = -6(x + 1)$

解析 以 $(1, 4)$ 為頂點， $L: 2x + 1 = 0$ 為準線的拋物線 Γ ，如圖，

對稱軸與準線的交點 $H(-\frac{1}{2}, 4)$ ，焦點 $(1 + \frac{3}{2}, 4) = (\frac{5}{2}, 4)$ ， $c = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$ ，

拋物線方程式為 $(y - 4)^2 = 4 \times \frac{3}{2}(x - 1)$ ，即 $\Gamma: (y - 4)^2 = 6(x - 1)$ ，

拋物線 Γ' 與 Γ 對稱於 y 軸，則 Γ' 的頂點 $(-1, 4)$ ，開口朝左，
 所以 Γ' 的方程式為 $(y - 4)^2 = -6(x + 1)$.



3.已知 $A(5, -3)$ ， $B(-1, -3)$ 為平面上兩點，則以 A 為頂點， B 為焦點的拋物線
 方程式為 _____ .

解答 $(y + 3)^2 = -24(x - 5)$

解析 拋物線 Γ 以 $A(5, -3)$ 為頂點， $B(-1, -3)$ 為焦點，如圖，

則 $c = -6$ ， Γ 的方程式為 $(y + 3)^2 = 4(-6)(x - 5)$ ，

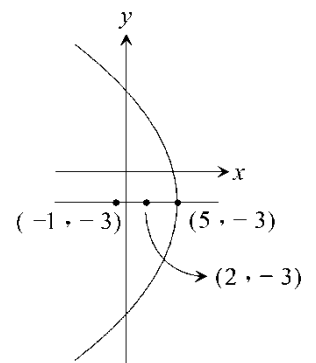
即 $(y + 3)^2 = -24(x - 5)$.

4.拋物線 $x^2 + 2x + 4y - 7 = 0$ 之準線方程式為 _____ .

解答 $y = 3$

解析 $x^2 + 2x + 4y - 7 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = -4(y - 2)$ ，

\therefore 頂點 $V(-1, 2)$ ， $c = -1$ ，故準線 $L: y = 3$.



5. 拋物線 Γ 過 $(1, 1)$, $(3, 2)$, $(3, -1)$ 三點且對稱軸平行 x 軸, 則

(1) Γ 之方程式為_____ . (2) Γ 之焦點為_____ .

解答 (1) $x = y^2 - y + 1$; (2) $(1, \frac{1}{2})$

解析 設拋物線 $\Gamma: x = ay^2 + by + c$, 將 $(1, 1)$, $(3, 2)$, $(3, -1)$ 代入,

$$\therefore \begin{cases} 1 = a + b + c \\ 3 = 4a + 2b + c \\ 3 = a - b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ b = -1 \\ 4a + c = 5 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -1, c = 1,$$

$$\therefore x = y^2 - y + 1 \Rightarrow (y - \frac{1}{2})^2 = x - \frac{3}{4}, \therefore \text{頂點 } V(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}), \text{ 故焦點 } F(1, \frac{1}{2}).$$

6. 與 $y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$ 共軸、共焦點且過 $(3, 1)$ 之拋物線方程式為_____ .

解答 $(y + 3)^2 = -16(x - 4)$ 或 $(y + 3)^2 = 4(x + 1)$

解析 $y^2 - 4x + 6y + 5 = 0 \Rightarrow (y + 3)^2 = 4(x + 1)$,

\therefore 頂點為 $(-1, -3)$, $c = 1 \Rightarrow$ 焦點為 $(0, -3)$ 且對稱軸為 $y + 3 = 0$,

設 $\Gamma: (y + 3)^2 = 4k(x + k)$, 將 $(3, 1)$ 代入,

$$\therefore 16 = 4k(3 + k) \Rightarrow k^2 + 3k - 4 = 0 \Rightarrow k = 1 \text{ 或 } -4,$$

故 $(y + 3)^2 = -16(x - 4)$ 或 $(y + 3)^2 = 4(x + 1)$.

7. 拋物線 Γ 對稱於 $x - 1 = 0$ 且過二點 $(2, 3)$, $(-1, 6)$, 則 Γ 的方程式為_____ .

解答 $(x - 1)^2 = y - 2$

解析 設 $\Gamma: (x - 1)^2 = ay + b$, 將 $(2, 3)$, $(-1, 6)$ 代入 $\Rightarrow \begin{cases} 1 = 3a + b \\ 4 = 6a + b \end{cases}$

$$\Rightarrow a = 1, b = -2, \text{ 故 } (x - 1)^2 = y - 2.$$

8. 焦點為 $(1, -1)$, 準線垂直於 y 軸, 焦距為 2 之拋物線方程式為_____ .

解答 $(x - 1)^2 = -8(y - 1)$ 或 $(x - 1)^2 = 8(y + 3)$

解析 焦距 $= |c| = 2 \Rightarrow c = \pm 2$,

$$\therefore c = -2 \text{ 時, 頂點 } V(1, 1), \therefore (x - 1)^2 = -8(y - 1)$$

$$c = 2 \text{ 時, 頂點 } V(1, -3), \therefore (x - 1)^2 = 8(y + 3).$$

9. 根據下列條件, 求出拋物線之方程式:

(1) 焦點 $(2, 1)$, 準線平行於 y 軸, 焦距為 2: _____ .

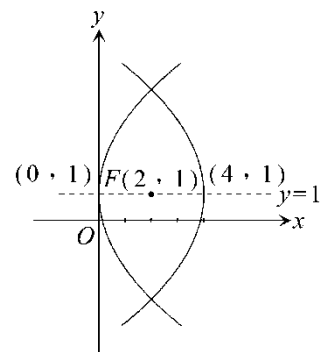
(2) 頂點 $(0, 0)$, 焦點在直線 $x - y = 2$ 上, 對稱軸為 y 軸: _____ .

解答 (1) $(y - 1)^2 = 8x$ 或 $(y - 1)^2 = -8(x - 4)$; (2) $x^2 = -8y$

解析 (1) 焦點 $F(2, 1)$, 準線平行於 y 軸 \Rightarrow 軸的方程式為 $y = 1$ (軸垂直 y 軸),
 $|c| = 2 \Rightarrow c = \pm 2$.

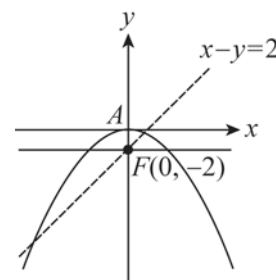
① $c = 2$ 時, 拋物線開口向右, 頂點在焦點 $F(2, 1)$ 的左方,
頂點坐標為 $(0, 1)$, 拋物線方程式為 $(y - 1)^2 = 8x$.

② $c = -2$ 時, 拋物線開口向左, 頂點在焦點 $F(2, 1)$ 的右方,
頂點坐標為 $(4, 1)$, 拋物線方程式為 $(y - 1)^2 = -8(x - 4)$.



∴拋物線方程式為 $(y-1)^2 = 8x$ 或 $(y-1)^2 = -8(x-4)$.

(2)焦點在直線 $x-y=2$ 上,也在對稱軸 $x=0$ 上,∴焦點坐標為 $F(0, -2)$,
又頂點 $A(0, 0)$,∴ $|c| = \overline{AF} = 2$,又拋物線開口向下 $\Rightarrow c = -2$,
故拋物線方程式為 $x^2 = -8y$.



10.試求拋物線 $\Gamma: y^2 = 16x$ 的焦點到準線距離_____.

解答 8

解析 拋物線 $\Gamma: y^2 = 16x$, $\therefore 4c = 16$, $\therefore c = 4$, 故焦點到準線的距離 $= |2c| = 8$.

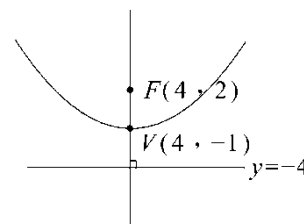
11.一拋物線的頂點 $(4, -1)$, 焦點 $(4, 2)$, 則拋物線之

(1)準線方程式為_____.

(2)拋物線方程式為_____.

解答 (1) $y = -4$; (2) $(x-4)^2 = 12(y+1)$

解析 頂點 $V(4, -1)$, 焦點 $F(4, 2)$, $c = \overline{VF} = 3$, 準線 $y = -1 - 3 \Rightarrow y = -4$,
開口向上, $c = 3$, $4c = 12$, 軸為 $x-4=0$, \therefore 拋物線方程式為 $(x-4)^2 = 12(y+1)$.



12.拋物線 $(x-3)^2 = 8(y+1)$ 的

(1)頂點坐標為_____.

(2)焦點坐標為_____.

(3)準線方程式為_____.

解答 (1) $(3, -1)$; (2) $(3, 1)$; (3) $y = -3$

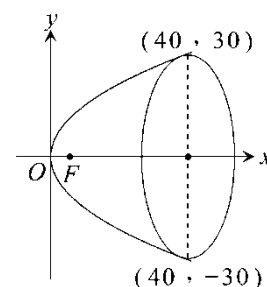
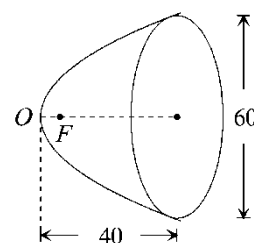
解析 $(x-3)^2 = 4 \times 2(y+1)$, $\therefore c = 2$, 頂點 $(3, -1)$,
焦點 $(3, -1+2) = (3, 1)$, 準線 $y+1 = -2 \Rightarrow y = -3$.

13.探照燈的外殼是拋物線繞它的對稱軸旋轉一周所形成的曲面, 如圖所示. 已知燈口處的直徑是 60 公分, 燈的深度是 40 公分, 則焦距(焦點與頂點的距離)是 _____公分.

解答 $\frac{45}{8}$

解析 建立坐標系, 頂點 O 為原點, 則設拋物線方程式為 $y^2 = 4cx$,
過 $(40, 30)$ 與 $(40, -30)$

$$\Rightarrow (30)^2 = 4c(40) \Rightarrow c = \frac{900}{160} = \frac{45}{8}, \text{ 即焦距} = \frac{45}{8}.$$



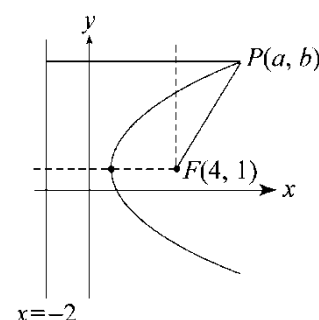
14.設 F 為拋物線 $(y-1)^2 = 12(x-1)$ 的焦點, 若 $P(a, b)$ 在拋物線上, 且 $\overline{PF} = 9$, 則 $a =$ _____.

解答 7

解析

〈解法一〉

拋物線 $(y-1)^2 = 12(x-1)$, 頂點 $(1, 1)$, $4c = 12$, $c = 3$,



∴ 焦點 $F(4, 1)$, $P(a, b)$ 在拋物線上且 $\overline{PF} = 9$

$$\Rightarrow \begin{cases} (b-1)^2 = 12(a-1) \\ \sqrt{(a-4)^2 + (b-1)^2} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b-1)^2 = 12(a-1) \dots\dots ① \\ (a-4)^2 + (b-1)^2 = 81 \dots\dots ② \end{cases}$$

①代入② $(a-4)^2 + 12(a-1) = 81 \Rightarrow a^2 + 4a - 77 = 0 \Rightarrow (a-7)(a+11) = 0$
 $\Rightarrow a = 7$ 或 -11 (代入①不合) .

〈解法二〉

拋物線 $(y-1)^2 = 12(x-1)$, 頂點 $(1, 1)$, $4c = 12$, $c = 3$,

∴ 開口向右, 焦點 $F(4, 1)$, 準線 $L: x = -2$,

∴ P 在拋物線上且 $\overline{PF} = 9$,

∴ $\overline{PF} = d(P, L) \Rightarrow 9 = a - (-2) \Rightarrow a = 7$.

15. 設有一拋物線 $\Gamma: y^2 = 8x$, 若與 Γ 共軸、共焦點, 通過點 $(1, 2\sqrt{6})$ 的拋物線為 $y^2 = ax + b$, $a > 0$, 則 $(a, b) =$ _____ .

解答 (12, 12)

解析 與 $y^2 = 8x$ 共軸、共焦點之拋物線, 其方程式可設之為 $y^2 = 4(2-t)(x-t)$, $t \in \mathbb{R}$,
∴ 過 $(1, 2\sqrt{6}) \Rightarrow 24 = 4(2-t)(1-t) \Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t = 4, -1$,
 $t = 4 \Rightarrow y^2 = -8(x-4) = -8x + 32$, $a < 0$ 不合,
 $t = -1 \Rightarrow y^2 = 12(x+1) = 12x + 12$, ∴ $a = 12$, $b = 12$.

16. 設拋物線 $y = mx^2 + 3(m-4)x - 9$ 交 x 軸於相異二點 P, Q , 則

(1) 當 \overline{PQ} 長最小時, m 的值為 _____ . (2) 又 \overline{PQ} 之最小值為 _____ .

解答 (1) $m = 8$; (2) 最小值 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

解析 $y = mx^2 + 3(m-4)x - 9$ 的圖形與 x 軸交於相異兩點 P, Q

$\Leftrightarrow D = 9(m-4)^2 - 4m(-9) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 16 > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 + 12 > 0$ 恆成立,

設 $P(\alpha, 0), Q(\beta, 0)$, 則 $mx^2 + 3(m-4)x - 9 = 0$ 的二根 α, β

$$\Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{3(m-4)}{m}, \quad \alpha\beta = \frac{-9}{m},$$

$$\therefore \overline{PQ}^2 = |\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{9(m-4)^2}{m^2} + \frac{36}{m} = 9\left(\frac{16}{m^2} - \frac{4}{m} + 1\right) = 9\left[\left(\frac{4}{m} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right],$$

當 $\frac{4}{m} = \frac{1}{2}$, 即 $m = 8$ 時, \overline{PQ}^2 最小值為 $9 \times \frac{3}{4} \Rightarrow \overline{PQ}$ 最小值 $= \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

17. 一拋物線的頂點在 y 軸上, 軸為 $y = 2$, 而焦點在 $x + 2y = 7$ 上, 則此拋物線的方程式為 _____ .

解答 $(y-2)^2 = 12x$

解析 拋物線的軸 $y = 2$, 頂點在 y 軸上 \Rightarrow 頂點 $(0, 2)$, 設拋物線方程式 $(y-2)^2 = 4cx$
則焦點在軸 $y = 2$ 上, 且焦點在 $x + 2y = 7$ 上, ∴ 焦點坐標為 $(3, 2) \Rightarrow c = 3 - 0 = 3$,
故 $(y-2)^2 = 12x$ 為所求 .

18.若方程式 $(x^2 + y^2 + 2x - 1) + k(x^2 + 2y^2 - 1) = 0$ 表一拋物線，則 $k =$ _____ .

解答 -1

解析 $(x^2 + y^2 + 2x - 1) + k(x^2 + 2y^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow (1+k)x^2 + (1+2k)y^2 + 2x - (1+k) = 0$ 之圖形為拋物線，

則必 y^2 之係數 $1+2k \neq 0$ ，而 x^2 之係數 $1+k=0$ ， $\therefore k = -1$.

19.拋物線 $y = ax^2 + bx + 1$ 的正焦弦長為 $\frac{1}{3}$ ，開口向下，其焦點為 $(k, \frac{9}{4})$ ，又 $k > 0$ ，則

(1)拋物線之對稱軸方程式為_____ . (2)準線方程式為_____ .

解答 (1) $x - \frac{2}{3} = 0$; (2) $y = \frac{29}{12}$

解析 $1^\circ y = ax^2 + bx + 1 = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + 1 \Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{a}(y + \frac{b^2}{4a} - 1)$ ， $a < 0$ ，

頂點 $(-\frac{b}{2a}, 1 - \frac{b^2}{4a})$ ，焦距 $|\frac{1}{4a}| = -\frac{1}{4a} \Rightarrow$ 焦點 $(-\frac{b}{2a}, 1 - \frac{b^2}{4a} + \frac{1}{4a})$.

2° 依題意，正焦弦長 $\frac{1}{-a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = -3$ ， $1 - \frac{b^2}{4a} + \frac{1}{4a} = \frac{9}{4} \Rightarrow b^2 = 16$ ，

又焦點 $(k, \frac{9}{4})$ 在對稱軸 $x = -\frac{b}{2a}$ 上， $k > 0$ ，

$\therefore -\frac{b}{2a} > 0$ ，又 $a < 0$ ， $\therefore b > 0$ ，故 $b = 4$.

3° 拋物線方程式 $(x - \frac{2}{3})^2 = \frac{1}{-3}(y - \frac{7}{3})$ ，對稱軸方程式 $x - \frac{2}{3} = 0$ ，頂點 $(\frac{2}{3}, \frac{7}{3})$

\Rightarrow 準線 $y = \frac{7}{3} + \frac{1}{12} = \frac{29}{12}$.

20.設 $A(1, -4)$ ， $B(5, 2)$ ，點 C 在曲線 $y = x^2$ 上，欲使 $\triangle ABC$ 的面積最小，則 C 點坐標為_____ .

解答 $(\frac{3}{4}, \frac{9}{16})$

解析 點 C 在 $y = x^2$ 上，設 $C(a, a^2)$ ，又 $A(1, -4)$ ， $B(5, 2)$

$\Rightarrow \vec{AB} = (4, 6)$ ， $\vec{AC} = (a-1, a^2+4)$ ，

則 $\triangle ABC$ 的面積 $= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ a-1 & a^2+4 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |4a^2 - 6a + 22| = |2(a - \frac{3}{4})^2 + \frac{79}{8}|$ ，

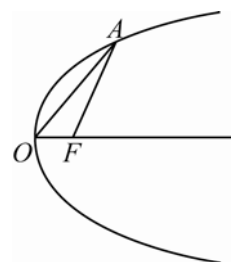
\therefore 當 $a = \frac{3}{4}$ 時，面積最小值為 $\frac{79}{8}$ ，此時 $C(\frac{3}{4}, \frac{9}{16})$.

21.如圖，有一拋物線開口向右，頂點為 $O(0, 0)$ ，焦點為 F ， A 為拋物線上一點， $\overline{AF} = 12$ ， $\overline{AO} = 3\sqrt{21}$ ，求此拋物線方程式為_____ .

解答 $y^2 = 20x$ 或 $y^2 = 12x$

解析 建立坐標，設 $A(a, b)$ ， $F(c, 0)$ ， $c > 0$ ，

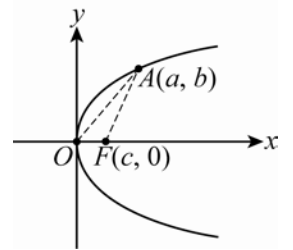
設 $\Gamma: y^2 = 4cx$ ，過 $A(a, b)$ ，代入得 $b^2 = 4ac \cdots \cdots \textcircled{1}$ ，



又 $12 = \overline{AF} = \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \Rightarrow (a-c)^2 + b^2 = 144 \dots\dots ②$,

$3\sqrt{21} = \overline{AO} = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 189 \dots\dots ③$,

聯立解 ①②③ 得 $(a, b, c) = (7, 2\sqrt{35}, 5)$ 或 $(9, 6\sqrt{3}, 3)$,
得拋物線方程式為 $y^2 = 20x$ 或 $y^2 = 12x$.



22. 如圖, Γ 之方程式為 $y^2 = 4x$, O 為 Γ 之頂點, 且 \overline{AB} 為 Γ 之正焦弦. 已知 Γ 之另一弦 \overline{CD} 與 \overline{AB} 平行, 且梯形 $ABDC$ 之面積為 $\triangle OAB$ 之面積的 9 倍, 則 C 的 x 坐標為_____.

解答 4

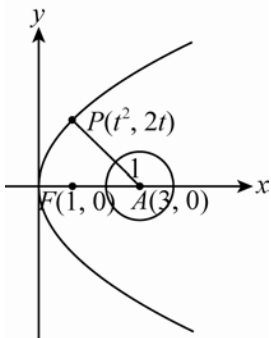
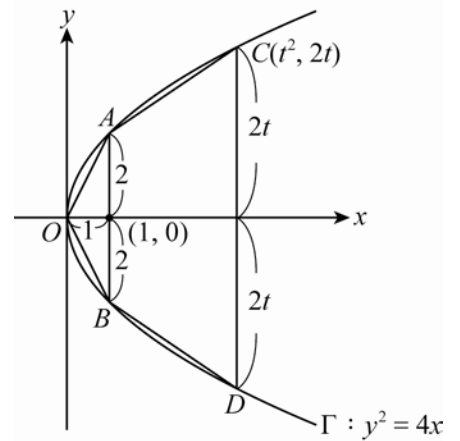
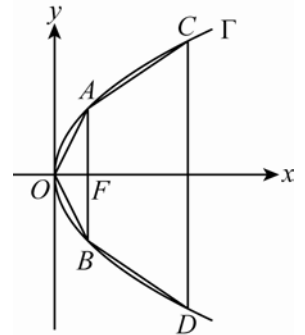
解析 $\Gamma: y^2 = 4x \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \overline{AB} = 4|c| = 4 \Rightarrow \triangle OAB = \frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 2$,

設 $C = (t^2, 2t)$, $t > 0$, 則 $ABDC$ 之面積 = $\frac{(4t+4)(t^2-1)}{2}$,

由題目知: $\frac{(4t+4)(t^2-1)}{2} = 9 \times 2 \Rightarrow$

$(t+1)(t^2-1) = 9 \Rightarrow t^3 + t^2 - t - 10 = 0$

$\Rightarrow (t-2)(t^2+3t+5) = 0 \Rightarrow t = 2, \therefore C$ 的 x 坐標 = $t^2 = 4$.



23. 已知拋物線 $\Gamma: y^2 = 4x$ 與圓 $C: (x-3)^2 + y^2 = 1$,
則 Γ 上一點 P 至 C 的最短距離為(1)_____,
此時 P 坐標為(2)_____.

解答 (1) $2\sqrt{2}-1$; (2) $(1, \pm 2)$

解析 設 $P(t^2, 2t)$, 圓心 $A(3, 0)$

$\Rightarrow \overline{AP} = \sqrt{(t^2-3)^2 + (2t-0)^2} = \sqrt{t^4 - 2t^2 + 9} = \sqrt{(t^2-1)^2 + 8}$,

\therefore 當 $t^2 = 1$ 時, 即 $t = \pm 1$, \overline{AP} 有最小值 $2\sqrt{2}$, 即當 $P(1, \pm 2)$ 時, Γ 至 C 的最短距離為 $2\sqrt{2}-1$.

24. 過 $F(2, 0)$ 的直線交拋物線 $y^2 = 8x$ 於 A, B 兩點, 過 A, B 兩點作 y 軸垂線, 分別交 y 軸於 C, D , 若 $\overline{AF} : \overline{BF} = 2 : 1$, 則梯形 $ABDC$ 面積為_____.

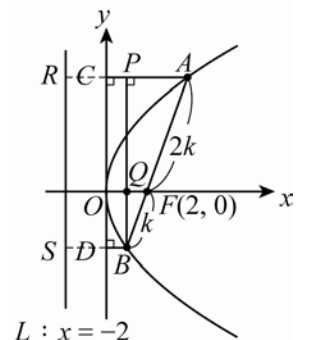
解答 $15\sqrt{2}$

解析 $y^2 = 8x, \therefore c = 2 \Rightarrow$ 焦點 $F(2, 0)$, 準線 $L: x + 2 = 0$,

作圖如下, 設 $\overline{AF} = 2k, \overline{BF} = k$, 由定義知 $\overline{AR} = 2k, \overline{BS} = k$, 則 $\overline{AP} = k, \overline{QF} = 4-k$,

$\therefore \frac{4-k}{k} = \frac{1}{3}, \therefore k = 3 \Rightarrow \overline{AR} = 6, \overline{BS} = 3$,

$\therefore B$ 點之 x 坐標為 1, 設 $B(1, y), y < 0$, 代入 $y^2 = 8x, \therefore y = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow B(1, -2\sqrt{2})$

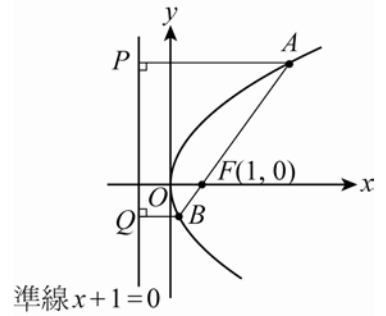


$$\Rightarrow \overline{BP} = 3\overline{BQ} = 6\sqrt{2}, \therefore \text{梯形 } ABDC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times (1+4) \times 6\sqrt{2} = 15\sqrt{2}.$$

25. 過拋物線 $\Gamma: y^2 = 4x$ 的焦點 F 的直線與 Γ 相交於 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 兩點，若 $x_1 + x_2 = 6$ ，則 \overline{AB} 弦長為_____。

解答 8

解析 作圖如下，由拋物線定義知： $\overline{AF} = \overline{AP}$ ， $\overline{BF} = \overline{BQ}$
 $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = \overline{AP} + \overline{BQ}$
 $= (x_1 + 1) + (x_2 + 1) = (x_1 + x_2) + 2$
 $= 6 + 2 = 8.$



26. 將拋物線 $\Gamma: y = x^2 + 2x + 3$ 平行直線 $x - 2y = 0$ 向右上方移動 $\sqrt{5}$ 單位長，則移動後的拋物線焦點坐標為_____。

解答 $(1, \frac{13}{4})$

解析 $x - 2y = 0$ 之法向量為 $(1, -2) \Rightarrow$ 方向向量可為 $(2, 1)$ ，

設 Γ 之平移向量 $\vec{v} = (2k, k), k > 0$ (\because 向右上方移動)

$$\Rightarrow \sqrt{(2k)^2 + k^2} = \sqrt{5}, \therefore k = 1, \therefore \vec{v} = (2, 1),$$

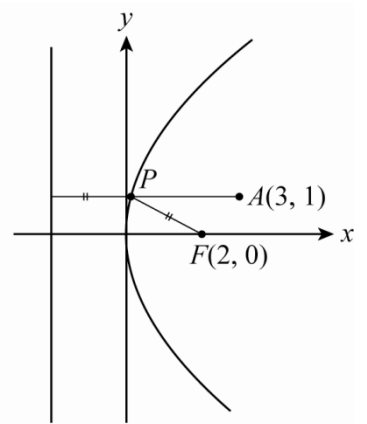
$$\Gamma: y = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2, \therefore (x+1)^2 = y - 2 = 4 \times \frac{1}{4}(y - 2)$$

$$\Rightarrow \text{焦點}(0, \frac{1}{4}) + (-1, 2) = (-1, \frac{9}{4}), \therefore \text{平移後之焦點為}(-1, \frac{9}{4}) + (2, 1) = (1, \frac{13}{4}).$$

27. 設拋物線 $\Gamma: y^2 = 8x$ ，其焦點 F ， P 為 Γ 上的動點， $A(3, 1)$ ，則 $\overline{PF} + \overline{PA}$ 之最小值 = (1)_____，此時 P 之坐標為 (2)_____。

解答 (1)5; (2) $(\frac{1}{8}, 1)$

解析 $\Gamma: y^2 = 8x, \therefore c = 2 \Rightarrow F(2, 0)$ ，準線 $L: x + 2 = 0$ ，
 $\overline{PA} + \overline{PF} = \overline{PA} + d(P, L) \geq d(A, L) = 3 + 2 = 5$ ，
 令 $y = 1$ 代入 Γ 中， $\therefore x = \frac{1}{8}$ ，即 $P(\frac{1}{8}, 1)$ 。

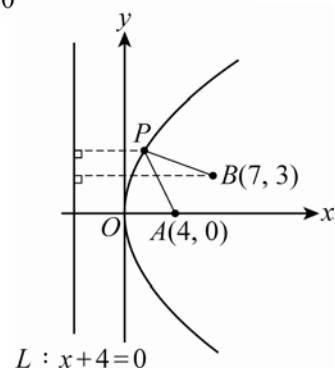


28. 設點 $P(x, y)$ 在拋物線 $y^2 = 16x$ 上，則 $\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-7)^2 + (y-3)^2}$ $L: x+2=0$

之最小值為_____。

解答 11

解析 設 $A(4, 0), B(7, 3) \Rightarrow$ 所求 $= \overline{PA} + \overline{PB}$ 之最小值，
 又 $y^2 = 16x, \therefore c = 4 \Rightarrow$ 焦點 $(4, 0)$ ，準線 $L: x + 4 = 0$
 $\Rightarrow \overline{PA} + \overline{PB} = d(P, L) + \overline{PB} \geq d(B, L) = 11.$



29. 設拋物線 $\Gamma: x^2 = 8y$ 上有兩點 A, B , 且 \overline{AB} 的中點坐標為 $(2, 4)$, 若 F 為拋物線的焦點, 則 $\overline{AF} + \overline{BF} =$

解答 12

解析 $x^2 = 8y$, $\therefore c = 2 \Rightarrow$ 焦點 $F(0, 2)$, 準線 $L: y + 2 = 0$,

令 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(2, 4)$

$\Rightarrow \overline{AF} + \overline{BF} = d(A, L) + d(B, L)$

$$= (y_1 + 2) + (y_2 + 2) = (y_1 + y_2) + 4$$

$$= 2d(M, x \text{ 軸}) + 4 = 2 \times 4 + 4 = 12 .$$

