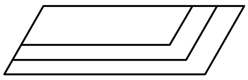
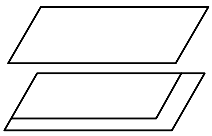
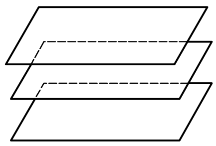
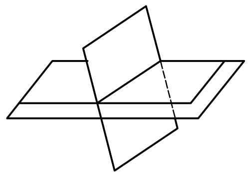
<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：103.04.28</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">2-3&3-1.2.3</td><td>班級</td><td>二年____班</td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

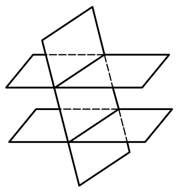
1.下列各圖代表空間中三平面相交的 8 種情形：

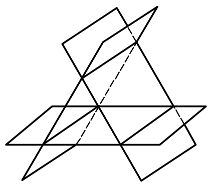
①

三平面重合

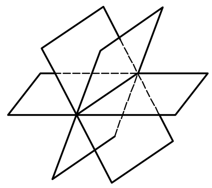
②

二平面重合且與第三平面平行

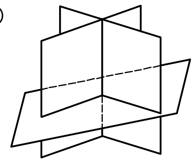
③

三平面平行

④

二平面重合且與第三平面交於一直線

⑤

二平面平行且與第三平面交於一直線

⑥

三平面兩兩相交於一直線但沒有共同交點

⑦

三平面兩兩不重合且相交於一直線

⑧

三平面交於一點

試問下列各組平面相交的圖形為上述何者？（寫下代號即可）

(1) $\begin{cases} E_1：2x-y+3z=1 \\ E_2：2x-y+3z=5 \\ E_3：2x-y+3z=4 \end{cases}$ ______________．　(2) $\begin{cases} E_1：2x-y+3z=4 \\ E_2：4x-2y+6z=8 \\ E_3：x-2y+z=1 \end{cases}$ ______________．

(3) $\begin{cases} E_1：x+y+z=1 \\ E_2：3x+3y+3z=3 \\ E_3：2x+2y+2z=5 \end{cases}$ ______________．　(4) $\begin{cases} E_1：x-2y+z=4 \\ E_2：-x+2y-z=-4 \\ E_3：2x-4y+2z=8 \end{cases}$ ______________．

(5) $\begin{cases} E_1：x-2y+z=0 \\ E_2：x-2y+z=1 \\ E_3：3x-y-z=2 \end{cases}$ ______________．　(6) $\begin{cases} E_1：x-y+z=2 \\ E_2：2x+y-z=1 \\ E_3：2x+y+z=7 \end{cases}$ ______________．

(7) $\begin{cases} E_1：x+y-z=1 \\ E_2：x+2y+3z=2 \\ E_3：x+3y+7z=3 \end{cases}$ ______________．　(8) $\begin{cases} E_1：x+y+2z=2 \\ E_2：2x+y+z=2 \\ E_3：x+2y+5z=2 \end{cases}$ ______________．

解答　見解析

解析　(1)因為三平面的法向量均為$(2,-1,3)$，且三平面均不重合，所以填③．

(2)因為 E_1：$2x-y+3z=4$ 與 E_2：$4x-2y+6z=8$ 為二重合平面，且共同的法向量$(2,-1,3)$與 E_3 的法向量$(1,-2,1)$不平行，所以填④．

(3)因為 E_1：$x+y+z=1$ 與 E_2：$3x+3y+3z=3$ 為二重合平面，且共同的法向量$(1,1,1)$與 E_3 的法向量$(2,2,2)$平行，所以填②．

(4)因為 E_1：$x-2y+z=4$，E_2：$-x+2y-z=-4$ 與 E_3：$2x-4y+2z=8$ 為重合三平面，所以填①．

(5)因為 E_1：$x-2y+z=0$ 與 E_2：$x-2y+z=1$ 為二平行平面，且共同的法向量$(1,-2,1)$與 E_3 的法向量$(3,-1,-1)$不平行，所以填⑤．

(6)因為$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=6\neq 0$，所以聯立方程式恰一組解，即三平面共點．故填⑧．

(7)因為$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 7\end{vmatrix}=0$，所以聯立方程式可能無解或無限多組解．

對於聯立方程式$\begin{cases}x+y-z=1\cdots① \\ x+2y+3z=2\cdots② \\ x+3y+7z=3\cdots③\end{cases}$，利用加減消去法，

由② − ①及③ − ①消去 x，得$\begin{cases}x+y-z=1\cdots① \\ y+4z=1\cdots④ \\ 2y+8z=2\cdots⑤\end{cases}$．

由⑤ − ④ × 2 消去 y，得$\begin{cases}x+y-z=1\cdots① \\ y+4z=1\cdots④ \\ 0=0\cdots⑥\end{cases}$　即$\begin{cases}x+y-z=1\cdots① \\ y+4z=1\cdots④\end{cases}$

令 $z=t$，代入④，解得 $y=1-4t$，再將 $y=1-4t$，$z=t$ 代回①，解得 $x=5t$．

可得聯立方程式的解為$\begin{cases}x=5t \\ y=1-4t \\ z=t\end{cases}$（$t$ 為實數），即聯立方程式有無限多組解．

因為三平面的法向量均不互相平行，故填⑦．

(8)因為$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 5\end{vmatrix}=0$，所以聯立方程式可能無解或無限多組解．

對於聯立方程式$\begin{cases}x+y+2z=2\cdots① \\ 2x+y+z=2\cdots② \\ x+2y+5z=2\cdots③\end{cases}$，利用加減消去法，

由② − ① × 2 及③ − ①消去 x，得$\begin{cases}x+y+2z=2\cdots① \\ -y-3z=-2\cdots④ \\ y+3z=0\cdots⑤\end{cases}$，

由⑤ + ④消去 y，得$\begin{cases}x+y+2z=2\cdots① \\ -y-3z=-2\cdots④ \\ 0=-2\cdots⑥\end{cases}$，

因為沒有 x，y，z 滿足⑥，所以聯立方程式無解．又三平面的法向量均不互相平行，故填⑥．

2.方程組$\begin{cases}5x+3y-z=0 \\ 2x+y+3z=a \\ x+4y+bz=17\end{cases}$ 有無限多解，求(1)$a=$____________．(2)$b=$____________．

解答　(1) − 1;(2) − 58

解析　方程組有無限多解，表示 $\Delta=\Delta_x=0$，

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & b \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 5b - 8 + 9 + 1 - 60 - 6b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -58 .$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ a & 1 & 3 \\ 17 & 4 & -58 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 - 4a + 153 + 17 - 0 + 174a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -1 .$$

3.方程組 $x + 2y + 3z = kx$, $2x + 3y + z = ky$, $3x + y + 2z = kz$ 有異於(0 , 0 , 0)之解，則(1)$k =$____________ .
(2)若 k 為整數，則方程組的解為____________ .

解答 (1)6，$\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$;(2)$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$（$t$ 為實數）

解析 $\begin{cases} (1-k)x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + (3-k)y + z = 0 \\ 3x + y + (2-k)z = 0 \end{cases}$，

(1) $\Delta = \begin{vmatrix} 1-k & 2 & 3 \\ 2 & 3-k & 1 \\ 3 & 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0$，

$\Rightarrow \quad (1 - k)(3 - k)(2 - k) + 6 + 6 - 9(3 - k) - (1 - k) - 4(2 - k) = 0$

$\Rightarrow \quad k^3 - 6k^2 - 3k + 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-6)(k-\sqrt{3})(k+\sqrt{3}) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 6，\sqrt{3}，-\sqrt{3}$.

(2)k 為整數，即 $k = 6$

$\begin{cases} -5x + 2y + 3z = 0 \cdots\cdots ① \\ 2x - 3y + z = 0 \cdots\cdots ② \\ 3x + y - 4z = 0 \cdots\cdots ③ \end{cases}$，

② × 3 − ① $\Rightarrow$ $11x - 11y = 0$,

② × 4 + ③ $\Rightarrow$ $11x - 11y = 0$,

令 $y = t$ $\Rightarrow$ $x = t$ 代入①得 $z = t$,

∴方程組之解為$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$（$t$ 為實數）.

4.已知 $A\,(5 , 1)$，$B\,(1 , 3)$，$C\,(1 , 1)$，若通過 A，B，C 三點之圓方程式為 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$，求序組$(d , e , f)$之值為____________ .

解答 $(-6 , -4 , 8)$

解析 圓方程式為 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$,

$A\,(5 , 1)$代入得 $25 + 1 + 5d + e + f = 0$,

$B\,(1 , 3)$代入得 $1 + 9 + d + 3e + f = 0$,

$C\,(1 , 1)$代入得 $1 + 1 + d + e + f = 0$,

$\Rightarrow \begin{cases} 5d + e + f = -26 \cdots\cdots ① \\ d + 3e + f = -10 \cdots\cdots ② \\ d + e + f = -2 \cdots\cdots ③ \end{cases}$，

解①②③得 $d=-6$，$e=-4$，$f=8$，$\therefore (d,e,f)=(-6,-4,8)$.

5.有個三位數，其百位數字與個位數字之和等於十位數字，如果將百位數字與十位數字交換，所得之三位數較原數大 450，如果將原數的十位數字與個位數字交換，所得之三位數較原數小 27，試求此數為____________ .

解答 385

解析 設此數為 $100a+10b+c$，

則 $\begin{cases} a+c=b \\ 100b+10a+c=100a+10b+c+450 \\ 100a+10c+b=100a+10b+c-27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b+c=0 \\ a-b=-5 \\ b-c=3 \end{cases}$，得 $a=3$，$b=8$，$c=5$，此數 385 .

6.若 $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x^2+y^2+z^2=12 \\ x^3+y^3+z^3=28 \end{cases}$ 且 $x>y>z$，則 $x=$____________ .

解答 $1+\sqrt{3}$

解析 $\because (x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$，

$\therefore 16=12+2(xy+yz+zx) \Rightarrow xy+yz+zx=2$，

$\because x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$，

$\therefore 28-3xyz=4(12-2) \Rightarrow xyz=-4$，

$\therefore x$、y、z 為 $t^3-4t^2+2t+4=0$ 的三根且 $x>y>z$，

又 $(t-2)(t^2-2t-2)=0 \Rightarrow t=2$，$1+\sqrt{3}$，$1-\sqrt{3}$，

$\because 1-\sqrt{3}<2<1+\sqrt{3}$，$\therefore x=1+\sqrt{3}$.

7.空間兩直線 $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 4x-3y+z=1 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} 2x+y-z=k \\ 3x+2y-2z=1 \end{cases}$ 相交於一點，則 $k=$____________ .

解答 1

解析 $\begin{cases} x+y-z=0 \cdots\cdots ① \\ 4x-3y+z=1 \cdots\cdots ② \\ 3x+2y-2z=1 \cdots\cdots ③ \\ 2x+y-z=k \cdots\cdots ④ \end{cases}$ 解①②③得 $x=1$，$y=2$，$z=3$，代入④得 $k=1$.

8.解 $\begin{cases} 6(x+y)=5xy \\ 2(y+z)=3yz \\ 3(z+x)=4zx \end{cases}$ 得 $(x,y,z)=$____________ .

解答 (0,0,0)或(3,2,1)

解析 (1)$xyz=0$：

當 $x=0$ 代入 $6(x+y)=5xy \Rightarrow y=0$，同理 $z=0$，$\therefore x=y=z=0$，$\therefore (x,y,z)=(0,0,0)$.

(2)$xyz\neq 0$：

$$\begin{cases} 6(x+y)=5xy \\ 2(y+z)=3yz \\ 3(z+x)=4zx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{4}{3} \end{cases} \quad \therefore (x,y,z)=(3,2,1) .$$

由(1)(2)可得，$(x,y,z)=(0,0,0)$或$(3,2,1)$．

9.設$\begin{cases} x(x+y+z)=12-yz \\ y(x+y+z)=15-zx \\ z(x+y+z)=20-xy \end{cases}$，求$(x,y,z)=$ ______________．

解答 $(1,2,3)$或$(-1,-2,-3)$

解析 原式$\Rightarrow\begin{cases} x^2+xy+xz+yz=12 \\ xy+y^2+yz+zx=15 \\ xz+yz+z^2+xy=20 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} (x+y)(x+z)=12\cdots\cdots① \\ (x+y)(y+z)=15\cdots\cdots② \\ (y+z)(x+z)=20\cdots\cdots③ \end{cases}$

$①\times②\times③\Rightarrow[(x+y)(y+z)(z+x)]^2=2^4\times3^2\times5^2\Rightarrow(x+y)(y+z)(z+x)=\pm60$，

當$(x+y)(y+z)(z+x)=60$，則$\begin{cases} y+z=5 \\ z+x=4 \\ x+y=3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$

當$(x+y)(y+z)(z+x)=-60$，則$\begin{cases} y+z=-5 \\ z+x=-4 \\ x+y=-3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \\ z=-3 \end{cases}$

$\therefore(x,y,z)=(1,2,3)$或$(-1,-2,-3)$．

10.x、y、z 為實數，解$\begin{cases} x(2y+z)=7 \\ y(2z+x)=14 \\ z(2x+y)=12 \end{cases}$ 得$(x,y,z)=$ ______________．

解答 $(1,2,3)$或$(-1,-2,-3)$

解析 $\begin{cases} x(2y+z)=7\cdots\cdots① \\ y(2z+x)=14\cdots\cdots② \\ z(2x+y)=12\cdots\cdots③ \end{cases}$

$①+②+③\Rightarrow3(xy+yz+zx)=33\Rightarrow xy+yz+zx=11\cdots\cdots④$

$④-①\Rightarrow yz-xy=4\cdots\cdots⑤$

$④-②\Rightarrow zx-yz=-3\cdots\cdots⑥$

$③+⑥\Rightarrow3zx=9\Rightarrow zx=3$ 代入⑥得 $yz=6$，代入①得 $xy=2$，

$(zx)(yz)(xy)=36\Rightarrow xyz=\pm6$，$\therefore(x,y,z)=(1,2,3)$或$(-1,-2,-3)$．

11.$\begin{cases} 2x+2y+z=1 \\ 3x-y+2z=-1 \\ 3x+y-z=-8 \end{cases}$，得$(x,y,z)=$ ______________．

解答 $(-2,1,3)$

解析 $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=2+12+3+3-4+6=22$，

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -8 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1-32-1-8-2-2=-44$，

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}2&1&1\\3&-1&2\\3&-8&-1\end{vmatrix}=2+6-24+3+32+3=22,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}2&2&1\\3&-1&-1\\3&1&-8\end{vmatrix}=16-6+3+3+2+48=66,$$

所以 $x=\dfrac{-44}{22}=-2$， $y=\dfrac{22}{22}=1$， $z=\dfrac{66}{22}=3$， $\therefore (x,y,z)=(-2,1,3)$.

12.已知方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$ 恰有一組解(2,3,1)且方程組 $\begin{cases}b_1x+c_1y+d_1z=a_1\\b_2x+c_2y+d_2z=a_2\\b_3x+c_3y+d_3z=a_3\end{cases}$ 也恰有一組解 (α,β,γ)，求 $(\alpha,\beta,\gamma)=$ ____________ .

解答 $(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$

解析 $b_1x+c_1y+d_1z=a_1\Rightarrow a_1-b_1x-c_1y=d_1z\Rightarrow a_1(\dfrac{1}{z})+b_1(\dfrac{-x}{z})+c_1(-\dfrac{y}{z})=d_1$,

$\dfrac{1}{z}=2\Rightarrow z=\dfrac{1}{2}=\gamma$， $-\dfrac{x}{z}=3\Rightarrow x=-3z=-\dfrac{3}{2}=\alpha$， $-\dfrac{y}{z}=1\Rightarrow y=-z=-\dfrac{1}{2}=\beta$,

$\therefore(\alpha,\beta,\gamma)=(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$.

13.設方程組 $\begin{cases}x+2y+3z=kx\\x+2y+3z=ky\\x+2y+3z=kz\end{cases}$ 恰有一組解，求 k 的範圍為____________ .

解答 $k\neq 0$ 且 $k\neq 6$

解析 原方程組為 $\begin{cases}(1-k)x+2y+3z=0\\x+(2-k)y+3z=0\\x+2y+(3-k)z=0\end{cases}$ 恰有一組解，則 $\begin{vmatrix}1-k&2&3\\1&2-k&3\\1&2&3-k\end{vmatrix}\neq 0$.

即 $(1-k)(2-k)(3-k)+6+6-3(2-k)-6(1-k)-2(3-k)\neq 0$

$\Rightarrow -k^3+6k^2\neq 0$，所以 $k\neq 0$ 且 $k\neq 6$.

14.空間中四平面的方程式如下： $x+y+z=0$、$x+y-z=-6$、$x-y+z=8$、$x-y-z=a$，其中 a 為實數，若此四平面共交一點時，則 a 的值為____________ .

解答 2

解析 $\because$ 三平面 $x+y+z=0$、$x+y-z=-6$、$x-y+z=8$ 有共同交點 $(1,-4,3)$,

$\therefore x-y-z=a$ 包含 $(1,-4,3)$，得出 $a=2$.

15.空間中三平面 $E_1:2x+3y+z=2$、$E_2:3x-2y+z=1$、$E_3:ax+by+z=1$，若三平面相交情形為其中兩平面平行與另一平面各交一線，則 $a+b=$ ____________ .

解答 5

解析 ①若 $E_1\,//\,E_3$ $\quad\dfrac{2}{a}=\dfrac{3}{b}=\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{2}{1}\Rightarrow a=2$，$b=3\Rightarrow a+b=5$.

②若 $E_2\,//\,E_3$ $\quad\dfrac{3}{a}=\dfrac{-2}{b}=\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{1}$（不合，$\because E_2$ 與 E_3 重合）.

由①② $\Rightarrow a+b=5$．

16.已知二次函數 $f(x)$過點 $A(1,-6)$，$B(2,1)$，$C(-3,26)$，則 $f(x)=$____________．

解答 $3x^2-2x-7$

解析 設 $f(x)=ax^2+bx+c$

過$(1,-6)\Rightarrow a+b+c=-6\cdots\cdots$①

過$(2,1)\Rightarrow 4a+2b+c=1\cdots\cdots$②

過$(-3,-26)\Rightarrow 9a-3b+c=26\cdots\cdots$③

由②－①得 $3a+b=7\cdots\cdots$④

③－②得 $5a-5b=25$ 即 $a-b=5\cdots\cdots$⑤

④＋⑤得 $4a=12\Rightarrow a=3\Rightarrow b=-2$ 代入①

$3-2+c=-6\Rightarrow c=-7$

$\therefore f(x)=3x^2-2x-7$．

17.設 $2x-3y+4z=x-y+2z=3x+y-2z$，求 $\dfrac{x+y-z}{2x-y+z}=$____________．

解答 1

解析 $\begin{cases}x-2y+2z=0\\x+4y-6z=0\end{cases}\Rightarrow x:y:z=2:4:3,\ x=2k,\ y=4k,\ z=3k,\ \therefore\dfrac{x+y-z}{2x-y+z}=\dfrac{2k+4k-3k}{4k-4k+3k}=1$．

18.一礦物內含 A、B、C 三種放射性物質，放射出同一種輻射．已知 A、B、C 每公克分別會釋放出 1 單位、2 單位、1 單位的輻射強度，又知 A、B、C 每過半年其質量分別變為原來質量的 $\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{1}{4}$ 倍．於一年前測得此礦物的輻射強度為 66 單位，而半年前測得此礦物的輻射強度為 22 單位，且目前此礦物的輻射強度為 8 單位，則目前此礦物中 A、B、C 物質之質量分別為

(1)____________，(2)____________，(3)____________公克．

解答 (1)4;(2)1;(3)2

解析 設 A、B、C 一年前分別有 x，y，z 公克，

$$\begin{cases}x+2y+z=66\\\dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{4}z=22\\\dfrac{1}{4}x+\dfrac{2}{9}y+\dfrac{1}{16}z=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2y+z=66\cdots\cdots①\\x+\dfrac{4}{3}y+\dfrac{1}{2}z=44\cdots\cdots②\\x+\dfrac{8}{9}y+\dfrac{1}{4}z=32\cdots\cdots③\end{cases}$$

$①-②\Rightarrow\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{2}z=22$，$①-③\Rightarrow\dfrac{10}{9}y+\dfrac{3}{4}z=34\Rightarrow\begin{cases}4y+3z=132\cdots\cdots④\\40y+27z=1224\cdots\cdots⑤\end{cases}$

$④\times10-⑤\Rightarrow 3z=96$，$z=32$，$y=9$，$x=16$，

則目前此礦物 A、B、C 物質之質量分別為 $16(\dfrac{1}{2})^2$，$9(\dfrac{1}{3})^2$，$32(\dfrac{1}{4})^2\Rightarrow 4$，1，2（公克）．

19.設 $a\in\mathbb{R}$，若方程組 $\begin{bmatrix}2&3-a\\a-3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+5\\a-7\end{bmatrix}$無解，則 $a=$____________．

解答 5

解析 $\Delta=\begin{vmatrix}2&3-a\\a-3&-2\end{vmatrix}=(a-1)(a-5)$，

$\Delta_x = \begin{vmatrix} a+5 & 3-a \\ a-7 & -2 \end{vmatrix} = (a-1)(a-11)$，$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & a+5 \\ a-3 & a-7 \end{vmatrix} = -(a+1)(a-1)$，

故當 $a=5$ 時，方程組無解．

1.阿妙解聯立方程組$\begin{cases} ax-y+4z=1 \\ x-by+3z=3 \\ 2x+y+cz=3 \end{cases}$，先寫出增廣矩陣，然後再利用列運算化簡到$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，若計算過程均無錯誤，求序對$(a,b,c)=$____________．

解答 (3,1,3)

解析 $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-3y+5z=5 \\ y+2z=5 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$

代回原方程組$\Rightarrow \begin{cases} -2a-1+8=1 \\ -2-b+6=3 \\ -4+1+2c=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \\ c=3 \end{cases}$ 數對$(a,b,c)=(3,1,3)$．

2.設矩陣$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$經列運算後得$\begin{bmatrix} a & 0 & 1 & 2 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 0 & 0 & c & 4 \end{bmatrix}$，則 $a+b+c$ 之值為____________．

解答 7

解析 $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 7 & 7 & 14 \\ 0 & 7 & 11 & 18 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 11 & 18 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow a=1$，$b=2$，$c=4$　$\therefore a+b+c=7$．

3.對矩陣$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & a \\ 1 & -2 & -3 & b \\ 3 & 2 & 2 & c \end{bmatrix}$作列運算若干次後得到$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$，則$(a\,,b\,,c)=$____________．

解答 $(-3\,,4\,,7)$

解析

$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & a \\ 1 & -2 & -3 & b \\ 3 & 2 & 2 & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \times 1 \\ \times(-3) \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}$得 $x=3$，$y=-2$，$z=1$

$\Rightarrow \begin{cases} -2x-y+z=a \\ x-2y-3z=b \\ 3x+2y+2z=c \end{cases}$ 的解$(x\,,y\,,z)=(3\,,-2\,,1)$，代入求出$(a\,,b\,,c)=(-3\,,4\,,7)$．

4.設 $A=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$，$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，若 $P=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，且已知 $A=PBP^{-1}$，試求

(1)$(3I_2-A)$的乘法反方陣為____________．（以 A 表示之）

(2)$A^4-6A^3+10A^2-8A+3I_2=$____________ .

(3)$A^{10}=$____________ .

解答 (1)$\frac{1}{2}A$;(2)$\begin{bmatrix}-15 & 15\\ -10 & 10\end{bmatrix}$;(3)$\begin{bmatrix}3070 & -3069\\ 2046 & -2045\end{bmatrix}$

解析 (1)$3I-A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 4\end{bmatrix}$ $\therefore (3I-A)^{-1}=\dfrac{1}{\det(3I-A)}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}A$.

(2)$\because A=PBP^{-1}$ $\therefore P^{-1}AP=B$，$B^n=P^{-1}A^nP \Leftrightarrow PB^nP^{-1}=A^n$

又 $B=-1\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ $\therefore B^n=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^n\end{bmatrix}$

而 $A^4-6A^3+10A^2-8A+3I=P(B^4-6B^3+10B^2-8B+3I)P^{-1}$

$=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-6+10-8+3 & 0\\ 0 & 2^4-6\times2^3+10\times2^2-8\times2+3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-15 & 15\\ -10 & 10\end{bmatrix}$.

(3)$\because A^{10}=PB^{10}P^{-1}$

$\therefore A^{10}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3070 & -3069\\ 2046 & -2045\end{bmatrix}$.

5.小明使用高斯－喬登消去法，在紙上解三元一次聯立方程式如下：

$\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & a & 18\\ 0 & -1 & -5 & b\\ 0 & 12 & c & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\cdots\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -6\end{bmatrix}$，數字 a，b，c 不慎污損，請幫他找回(a,b,c)為

____________ .

解答 $(-1,25,10)$

解析 由 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -6\end{bmatrix}$ 可知：$\begin{cases}x=2\\ y=5\\ z=-6\end{cases}$

$\begin{bmatrix}1 & 2 & a & 18\\ 0 & -1 & -5 & b\\ 0 & 12 & c & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+2y+az=18\\ -y-5z=b\\ 12y+cz=0\end{cases}$ 將 x,y,z 代入得 $\begin{cases}2+10-6a=18\\ -5+30=b\\ 60-6c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=25\\ c=10\end{cases}$ $\therefore(a,b,c)=$

$(-1,25,10)$.

6.若此方程組 $\begin{cases}2x+5y+z=-1\\ x+2y+2z=3\\ 3x+10y-6z=a-1\end{cases}$ 有解，則 a 值為____________ .

解答 -18

解析

$$\begin{bmatrix}2 & 5 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 2 & 3\\ 3 & 10 & -6 & a-1\end{bmatrix}\begin{matrix}\times(-2)\\ \times(-3)\end{matrix}\to\begin{bmatrix}0 & 1 & -3 & -7\\ 1 & 2 & 2 & 3\\ 0 & 4 & -12 & a-10\end{bmatrix}\times(-4)\to\begin{bmatrix}0 & 1 & -3 & -7\\ 1 & 2 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & a+18\end{bmatrix}$$

$\because$有解 $\therefore a=-18$.

7.設方程組 $\begin{cases}(1-a)x+2y=2b-c+1\\ 3x+(2-a)y=b+2c-7\end{cases}$，除 $x=0$，$y=0$ 的解外，尚有其他組解，試求(a,b,c)的值為

____________ .

解答 (4,1,3)或(− 1,1,3)

解析 ∵有(0,0)的解，∴ $\begin{cases}2b-c+1=0\\ b+2c-7=0\end{cases}$ $\Rightarrow (b,c)=(1,3)$ ，

$\begin{cases}(1-a)x+2y=0\\ 3x+(2-a)y=0\end{cases}$ 除了(0,0)之外尚有其他解，表示有無限多解，

$\therefore \dfrac{1-a}{3}=\dfrac{2}{2-a}\Rightarrow a=4$ 或− 1，∴$(a,b,c)=(4,1,3)$或$(-1,1,3)$.

8.若 $\begin{cases}x-y-z=2\\ x+z=3\\ 4x-3y-2z=t\end{cases}$ 有解，求 $t=$____________ .

解答 9

解析

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 3\\ 4 & -3 & -2 & t\end{bmatrix}\begin{matrix}\times(-1)\\ \times(-4)\end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & t-8\end{bmatrix}\begin{matrix}\times 1\\ \times(-1)\end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & t-9\end{bmatrix}$$

∵方程組有解 故為無限多組解 $\Rightarrow t-9=0\Rightarrow t=9$.

9.若一聯立方程式的增廣矩陣經過下列三個步驟進行運算：

(a)第一列乘上(− 2)加到第二列；

(b)第一列乘上 3 加到第三列；

(c)第二列乘上(− 1)加到第三列 .

得到矩陣為 $\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 5\\ 0 & 5 & -9 & -13\\ 0 & 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$ ，試求：

(1)此聯立方程式的解為____________ . (2)原聯立方程式為____________ .

解答 (1)$x=1$，$y=1$，$z=2$;(2)$\begin{cases}x-2y+3z=5\\ 2x+y-3z=-3\\ -3x+11y-16z=-24\end{cases}$

解析 (1)依題意可知原聯立方程式與聯立方程式 $\begin{cases}x-2y+3z=5 & ①\\ 5y-9z=-13 & ②\\ 2z=4 & ③\end{cases}$ 有相同的解 .

由③式得 $z=2$，代入②式得 $y=1$，將 y，z 代入①式得 $x=1$，故解為 $x=1$，$y=1$，$z=2$.

(2)將矩陣列運算逆回去即得 .

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 5\\ 0 & 5 & -9 & -13\\ 0 & 0 & 2 & 4\end{bmatrix}(1)\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 5\\ 0 & 5 & -9 & -13\\ 0 & 5 & -7 & -9\end{bmatrix}\begin{matrix}(2)\\ (-3)\end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 5\\ 2 & 1 & -3 & -3\\ -3 & 11 & -16 & -24\end{bmatrix}.$$

故原聯立方程式為$\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x+y-3z=-3 \\ -3x+11y-16z=-24 \end{cases}$.

10.下列是一個有關 x，y，z 方程組的高斯消去法運算過程：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 10 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & a & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & a & 10 \\ 0 & b & -7 & -17 \\ 0 & -1 & -5 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & a & 10 \\ 0 & 1 & 5 & c \\ 0 & 3 & -7 & -17 \end{bmatrix} \to\cdots$$ 繼續列運算，

可求得 x，y，z 之解．試問：式中數對$(a,b,c)=$＿＿＿＿＿＿．

解答　(3,3,9)

解析

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 10 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (-2) \\ (-1) \end{array} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 3 & -7 & -17 \\ 0 & -1 & -5 & -9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow(-1) \end{array}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 3 & -7 & -17 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & -7 & -17 \end{bmatrix}$$ ，故數對$(a,b,c)=(3,3,9)$．

11.矩陣$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$可經列運算化為$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x & y & z \\ 0 & 1 & 0 & p & q & r \\ 0 & 0 & 1 & l & m & n \end{bmatrix}$，則$\begin{bmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ l & m & n \end{bmatrix}=$＿＿＿＿＿＿．

解答　$\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{15} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{-4}{15} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

解析

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (-2) \\ (-1) \end{array} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow(\frac{1}{3}) \\ \\ \end{array}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (1) \\ \\ (-4) \end{array} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow(\frac{1}{5}) \end{array}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&1&-1&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&1&\frac{1}{3}&-\frac{4}{15}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{matrix}(-1)\\(1)\\ \end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}\\0&1&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{15}&\frac{1}{5}\\0&0&1&\frac{1}{3}&-\frac{4}{15}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}.$$

則$\begin{bmatrix}x&y&z\\p&q&r\\l&m&n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{3}{5}&\frac{-1}{5}\\\frac{-1}{3}&\frac{1}{15}&\frac{1}{5}\\\frac{1}{3}&\frac{-4}{15}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}$.

12.設方程組 L：$\begin{cases}x+y+z=1\\2x+3y-z=2\\4x+5y+az=b\end{cases}$，

(1)當 $a=h$，$b=k$ 時，方程組 L 有無限多解，則數對$(h,k)=$______________.

(2)當 $a\neq$______________時，方程組 L 恰有一解．

解答 (1)(1 , 4);(2)1

解析 由矩陣列運算得$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&3&-1&2\\4&5&a&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-3&0\\0&1&a-4&b-4\end{bmatrix}$，

(1)∵無限多解，∴$\begin{cases}a-4=-3\\b-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=4\end{cases}$，故$(h,k)=(1,4)$．

(2)$\frac{1}{1}\neq\frac{-3}{a-4}$恰有一解$\Rightarrow a\neq1$．

1.若 $A=\begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-2\\3&-1\end{bmatrix}$，則$(A+B)(A-2B)=$______________.

解答 $\begin{bmatrix}8&17\\5&25\end{bmatrix}$

解析 ∵ $A+B=\begin{bmatrix}4&-1\\5&0\end{bmatrix}$，$A-2B=\begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&-4\\6&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5\\-4&3\end{bmatrix}$

∴ $(A+B)(A-2B)=\begin{bmatrix}4&-1\\5&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&5\\-4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&17\\5&25\end{bmatrix}$．

2.設 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}k&2\\3&9\end{bmatrix}$，若$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$成立，則 $k=$______________.

解答 6

解析 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$成立時，$AB=BA$，

$AB=\begin{bmatrix}k+6&20\\3k+12&42\end{bmatrix}$，而 $BA=\begin{bmatrix}k+6&2k+8\\30&42\end{bmatrix}$，得 $k=6$．

3.若$\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&4\\1&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&1&-3\\3&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-1\\3\end{bmatrix}$，則$y=$____________.

解答　$-\dfrac{29}{10}$

解析　$\begin{cases}u-2v+3w=5\\2u+v-3w=-1\\3u-v+2w=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=\dfrac{3}{10}\\v=-\dfrac{31}{10}\\w=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$，$\begin{cases}y+z=\dfrac{3}{10}\\x+y+4z=-\dfrac{31}{10}\\x-y+3z=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow y=-\dfrac{29}{10}$.

4.設$M=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$，求$M^{12}=$____________.

解答　$\begin{bmatrix}-64&0\\0&-64\end{bmatrix}$

解析　$M^2=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2\\2&0\end{bmatrix}$,

$M^3=\begin{bmatrix}0&-2\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-2\\2&-2\end{bmatrix}$,

$M^4=\begin{bmatrix}-2&-2\\2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&0\\0&-4\end{bmatrix}=-4I$,

$(M^4)^3=(-4I)^3=-64I=\begin{bmatrix}-64&0\\0&-64\end{bmatrix}$.

5.若$A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}$，試求$A^{2014}=$____________.

解答　$\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}$

解析　$A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}$，$A^2=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-1\end{bmatrix}$

$A^3=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=(-1)I$

$A^{2014}=(A^3)^{671}A=[(-1)I]^{671}A=I^{671}A=A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}$.

6.若$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，則$A^{50}=$____________.

解答　$\begin{bmatrix}1&50&1275\\0&1&50\\0&0&1\end{bmatrix}$

解析 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$A^2=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$，$A^3=\begin{bmatrix}1&3&6\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$，$A^4=\begin{bmatrix}1&4&10\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ 可推斷 $A^n=\begin{bmatrix}1&n&1+2+\cdots+n\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\therefore A^{50}=\begin{bmatrix}1&50&\frac{50\times 51}{2}\\0&1&50\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&50&1275\\0&1&50\\0&0&1\end{bmatrix}$.

7.設 $A=\begin{bmatrix}8&10\\-4&-5\end{bmatrix}$滿足 $A+A^2+A^3+A^4+A^5=kA$，求實數 $k=$____________ .

解答 121

解析 $A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}8&10\\-4&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8&10\\-4&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24&30\\-12&-15\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}8&10\\-4&-5\end{bmatrix}=3A$,

$\therefore A+A^2+A^3+A^4+A^5=A+3A+3^2A+3^3A+3^4A=121A$，$\therefore k=121$.

8.設矩陣 $A=[a_{ij}]_{3\times 2}$，其中 $a_{ij}=i^2+ij+2$，求矩陣 $A=$____________ .

解答 $\begin{bmatrix}4&5\\8&10\\14&17\end{bmatrix}$

解析 $A=\begin{bmatrix}4&5\\8&10\\14&17\end{bmatrix}$.

9.設 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$，則 $A^{54}-A^{124}B^{54}+2B^{141}=$____________ .

解答 $\begin{bmatrix}-1&-1\\1&-1\end{bmatrix}$

解析 $A=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4}&-\sin\frac{\pi}{4}\\\sin\frac{\pi}{4}&\cos\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{6}&\sin\frac{\pi}{6}\\-\sin\frac{\pi}{6}&\cos\frac{\pi}{6}\end{bmatrix}$，提示: $\pi=90°$

$A^{54}-A^{124}B^{54}+2B^{141}$

$=\begin{bmatrix}\cos\frac{27\pi}{2}&-\sin\frac{27\pi}{2}\\\sin\frac{27\pi}{2}&\cos\frac{27\pi}{2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\cos 31\pi&-\sin 31\pi\\\sin 31\pi&\cos 31\pi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 9\pi&\sin 9\pi\\-\sin 9\pi&\cos 9\pi\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}\cos\frac{47\pi}{2}&\sin\frac{47\pi}{2}\\-\sin\frac{47\pi}{2}&\cos\frac{47\pi}{2}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&-1\end{bmatrix}$.

10.設 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，求 $A^{192}-3A^{45}+2I_2=$ ____________ .

解答 $\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$

解析 $A=\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{bmatrix}\Rightarrow A^6=\begin{bmatrix}\cos 360^\circ & -\sin 360^\circ\\ \sin 360^\circ & \cos 360^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$,

$\therefore A^{192}-3A^{45}+2I_2=I_2-3A^3+2I_2=3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$.

11.設 $A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$，求(1)$A^{100}=$ ____________ . (2)使 $A^n=I_2$ 的最小自然數 n 為____________ .

解答 (1)$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$;(2)12

解析 (1)$A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{bmatrix}$,

$$A^{100}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{bmatrix}^{100}=\begin{bmatrix}\cos(100\times\frac{\pi}{6}) & -\sin(100\times\frac{\pi}{6})\\ \sin(100\times\frac{\pi}{6}) & \cos(100\times\frac{\pi}{6})\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3}\\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix} .$$

$$(2)A^n=\begin{bmatrix}\cos\frac{n\pi}{6} & -\sin\frac{n\pi}{6}\\ \sin\frac{n\pi}{6} & \cos\frac{n\pi}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\cos\frac{n\pi}{6}=1\\ \sin\frac{n\pi}{6}=0\end{cases}$$

$\therefore \frac{n\pi}{6}=2k\pi\Rightarrow n=12k$（$k$ 為自然數），取 $k=1$ 時，所求的最小自然數為 12 .

12.設 $A=\begin{bmatrix}1 & -4 & 5\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ -2 & -4 & 6\end{bmatrix}$，若 $5X-A+B=2A+3X$，求 $X=$ ____________ .

解答 $\begin{bmatrix}1 & -5 & 9\\ 7 & 5 & -3\end{bmatrix}$

解析 $5X-A+B=2A+3X\Rightarrow 2X=3A-B$

$$\Rightarrow X=\frac{3}{2}A-\frac{1}{2}B=\frac{3}{2}\begin{bmatrix}1&-4&5\\4&2&0\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-2&-3\\-2&-4&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-5&9\\7&5&-3\end{bmatrix}.$$

13. $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，求 $A^{50}=$____________ .

解答 $\begin{bmatrix}1&50&1275\\0&1&50\\0&0&1\end{bmatrix}$

解析 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

令 $B=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$　$\therefore B^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$B^3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$$\therefore A^{50}=(I+B)^{50}=C_0^{50}I+C_1^{50}B+C_2^{50}B^2$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+50\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}+1225\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&50&1275\\0&1&50\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

14.設 $A=[a_{ij}]_{6\times6}$，且 $a_{ij}=\begin{cases}i & ,i<j\\0, & i=j\\j, & i>j\end{cases}$，則 A 之各元總和為____________ .

解答 70

解析 依題意可知 $A=\begin{bmatrix}0&1&1&1&1&1\\1&0&2&2&2&2\\1&2&0&3&3&3\\1&2&3&0&4&4\\1&2&3&4&0&5\\1&2&3&4&5&0\end{bmatrix}$，

故 A 之各元總和為 $2\times(1\times5+2\times4+3\times3+4\times2+5\times1)=70$.

15.若矩陣 A，B 滿足 $3A+2B=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&2&3\end{bmatrix}$，$2A+B=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&1&2\end{bmatrix}$，

則(1)$A=$____________，(2)$B=$____________ .

解答 (1)$\begin{bmatrix}0&0&-3\\-3&0&1\end{bmatrix}$;(2)$\begin{bmatrix}1&0&5\\5&1&0\end{bmatrix}$

解析 設 $X=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&2&3\end{bmatrix}$，$Y=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&1&2\end{bmatrix}$，$\Rightarrow\begin{cases}3A+2B=X\\2A+B=Y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-X+2Y\\B=2X-3Y\end{cases}$，

故 $A=-\begin{bmatrix}2&0&1\\1&2&3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-3\\-3&0&1\end{bmatrix}$，

$B=2\begin{bmatrix}2&0&1\\1&2&3\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&5\\5&1&0\end{bmatrix}$.

16.若矩陣 A，B 滿足 $A+B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，$A-B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$，求 $A^2-B^2=$ ____________ .

解答 $\begin{bmatrix}10 & 0\\ 5 & 8\end{bmatrix}$

解析 $A=\frac{1}{2}(\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix})=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$,

$B=\frac{1}{2}(\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix})=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 6\\ -4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{bmatrix}$,

故 $A^2-B^2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-5 & 3\\ -2 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 0\\ 5 & 8\end{bmatrix}$.

17.ω 為 $x^3-1=0$ 的一虛根，且 $A_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & \omega\\ \omega & 0 & 0\\ 0 & \omega & 0\end{bmatrix}$，$A_2=\begin{bmatrix}0 & \omega^2 & 0\\ 0 & 0 & \omega^2\\ \omega^2 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$A_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，則

$\omega^2A_1+\omega A_2-A_3=$ ____________ .

解答 $\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$

解析 $\omega^2A_1+\omega A_2-A_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & \omega^3\\ \omega^3 & 0 & 0\\ 0 & \omega^3 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \omega^3 & 0\\ 0 & 0 & \omega^3\\ \omega^3 & 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$.

18.設 $A=\begin{bmatrix}\sin 28^\circ & \cos 28^\circ\\ -\cos 28^\circ & \sin 28^\circ\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}\sin 17^\circ & \cos 17^\circ\\ -\cos 17^\circ & \sin 17^\circ\end{bmatrix}$, 試求：(1)$AB=$ ________ .(2)$(AB)^{10}=$ _________ .

解答 (1)$\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$;(2)$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

解析 (1)$AB=\begin{bmatrix}\sin 28^\circ & \cos 28^\circ\\ -\cos 28^\circ & \sin 28^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin 17^\circ & \cos 17^\circ\\ -\cos 17^\circ & \sin 17^\circ\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\sin 28^\circ\sin 17^\circ-\cos 28^\circ\cos 17^\circ & \sin 28^\circ\cos 17^\circ+\cos 28^\circ\sin 17^\circ\\ -\sin 17^\circ\cos 28^\circ-\cos 17^\circ\sin 28^\circ & -\cos 28^\circ\cos 17^\circ+\sin 28^\circ\sin 17^\circ\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-\cos 45^\circ & \sin 45^\circ\\ -\sin 45^\circ & -\cos 45^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$.

(2)$AB=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 225^\circ & -\sin 225^\circ\\ \sin 225^\circ & \cos 225^\circ\end{bmatrix}$.

故$(AB)^{10}=\begin{bmatrix}\cos(10\times 225^\circ) & -\sin(10\times 225^\circ)\\ \sin(10\times 225^\circ) & \cos(10\times 225^\circ)\end{bmatrix}$，又 $2250^\circ=360^\circ\times 6+90^\circ$,

故$(AB)^{10}=\begin{bmatrix}\cos 90^\circ & -\sin 90^\circ\\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

19.設 A、B 均為二階方陣，且 $A+B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}$， $A-B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$，則 $A^2-B^2=$____________ .

解答 $\begin{bmatrix}6 & 10\\ 17 & 21\end{bmatrix}$

解析 $2A=(A+B)+(A-B)=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$,

代回 $A+B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$， $A^2=\begin{bmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{bmatrix}$， $B^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$,

則 $A^2-B^2=\begin{bmatrix}6 & 10\\ 17 & 21\end{bmatrix}$.

20.設 $A=\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$，求 $A^2-2aA+(a^2+b^2)I_2=$____________ .

解答 $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

解析 $A^2=\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2-b^2 & -2ab\\ 2ab & a^2-b^2\end{bmatrix}$,

$A^2-2aA+(a^2+b^2)I=\begin{bmatrix}a^2-b^2 & -2ab\\ 2ab & a^2-b^2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2a^2 & -2ab\\ 2ab & 2a^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a^2+b^2 & 0\\ 0 & a^2+b^2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}a^2-b^2-2a^2+a^2+b^2 & -2ab+2ab\\ 2ab-2ab & a^2-b^2-2a^2+a^2+b^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

1.設 $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 3\end{bmatrix}$，若 $AX=B$，則二階方陣 $X=$____________ .

解答 $\begin{bmatrix}-5 & 6\\ 4 & -3\end{bmatrix}$

解析 $AX=B \quad\Rightarrow\quad X=A^{-1}B$,

又 $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$,

$\therefore\quad X=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 6\\ 4 & -3\end{bmatrix}$.

2.已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 2 & 3\end{bmatrix}$有反方陣，求 A 的反方陣為____________ .

解答 $\begin{bmatrix}-\dfrac{3}{7} & \dfrac{5}{7}\\ \dfrac{2}{7} & -\dfrac{1}{7}\end{bmatrix}$

解析 設 A 的反方陣 $A^{-1}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

則 $A\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix}1&5\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a+5c&b+5d\\2a+3c&2b+3d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}a+5c=1\\2a+3c=0\end{cases}\Rightarrow a=-\dfrac{3}{7}$，$c=\dfrac{2}{7}$

$\begin{cases}b+5d=0\\2b+3d=1\end{cases}\Rightarrow b=\dfrac{5}{7}$，$d=-\dfrac{1}{7}$

$\therefore A$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix}-\dfrac{3}{7}&\dfrac{5}{7}\\\dfrac{2}{7}&-\dfrac{1}{7}\end{bmatrix}$.

3.設 $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$,$P=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$,若 $A^5\times P=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$,則(1)A 的逆矩陣 $A^{-1}=$ ____________.(2)$b-a=$ ______________.

解答 (1)$\begin{bmatrix}-1&1\\1&0\end{bmatrix}$;(2)8

解析 (1)$A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\1&0\end{bmatrix}$.

(2)$A^2=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$，$A^3=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$，$A^5=A^2\times A^3=\begin{bmatrix}3&5\\5&8\end{bmatrix}$，故 $A^5\times P=\begin{bmatrix}3&5\\5&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\21\end{bmatrix}$，

$\therefore a=13$，$b=21$，故 $b-a=8$.

4.若 X 為二階矩陣且滿足 $\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}-3&3\\4&-8\end{bmatrix}$，則 $X=$ ____________ .

解答 $\begin{bmatrix}12&-18\\-5&7\end{bmatrix}$

解析 $X=\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-3&3\\4&-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&\dfrac{3}{2}\\1&-\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&3\\4&-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12&-18\\-5&7\end{bmatrix}$.

5.設 $A=\begin{bmatrix}5&-2\\-2&1\end{bmatrix}$，$X$ 為 2×3 矩陣且滿足 $AX=\begin{bmatrix}1&2&1\\6&-2&5\end{bmatrix}$，求矩陣 $X=$ ____________ .

解答 $\begin{bmatrix}13&-2&11\\32&-6&27\end{bmatrix}$

解析 $A=\begin{bmatrix}5&-2\\-2&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}$，

$AX=\begin{bmatrix}1&2&1\\6&-2&5\end{bmatrix}\Rightarrow X=A^{-1}\begin{bmatrix}1&2&1\\6&-2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\6&-2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&-2&11\\32&-6&27\end{bmatrix}$.

6.已知二階方陣 A 滿足 $A\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix}$，試求矩陣 $A=$ ____________ .

解答 $\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}$

解析　由題意知，$A\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 8\\4 & 6\end{bmatrix}$

求$\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 5\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{10-9}\begin{bmatrix}5 & -3\\-3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -3\\-3 & 2\end{bmatrix}$

$\therefore A=A\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 5\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}5 & 8\\4 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -3\\-3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25-24 & -15+16\\20-18 & -12+12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 0\end{bmatrix}$.

7.求矩陣$A=\begin{bmatrix}5 & -1\\-7 & 2\end{bmatrix}$的反方陣$A^{-1}=$____________ .

解答　$\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\\frac{7}{3} & \frac{5}{3}\end{bmatrix}$

解析　設$A^{-1}=\begin{bmatrix}x & u\\y & v\end{bmatrix}$，依乘法反方陣的定義，

$AA^{-1}=I_2\Rightarrow\begin{bmatrix}5 & -1\\-7 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & u\\y & v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}5x-y & 5u-v\\-7x+2y & -7u+2v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}5x-y=1\\-7x+2y=0\end{cases}$且$\begin{cases}5u-v=0\\-7u+2v=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{3}\\y=\frac{7}{3}\end{cases}$，$\begin{cases}u=\frac{1}{3}\\v=\frac{5}{3}\end{cases}$，

故$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\\frac{7}{3} & \frac{5}{3}\end{bmatrix}$，而且$A^{-1}A=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\\frac{7}{3} & \frac{5}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -1\\-7 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=I_2$，方陣$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\\frac{7}{3} & \frac{5}{3}\end{bmatrix}$.

8.設$A=\begin{bmatrix}4 & -3\\5 & -3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}14\\31\end{bmatrix}$,且矩陣$X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$滿足$AX=B$,求(1)$A$的反方陣$A^{-1}=$______.(2)$X=$________.

解答　(1)$\begin{bmatrix}-1 & 1\\-\frac{5}{3} & \frac{4}{3}\end{bmatrix}$;(2)$\begin{bmatrix}17\\18\end{bmatrix}$

解析　(1) $\det(A)=\begin{vmatrix}4 & -3\\5 & -3\end{vmatrix}=-12+15=3$，$A^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}-3 & 3\\-5 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\-\frac{5}{3} & \frac{4}{3}\end{bmatrix}$.

(2)$AX=B\quad\Rightarrow X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\-\frac{5}{3} & \frac{4}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14\\31\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17\\18\end{bmatrix}$.

9.若$\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}4 & 3\\1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}$，則矩陣$X=$____________ .

解答　$\begin{bmatrix}7 & -25\\-4 & 15\end{bmatrix}$

解析 $X=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-3&2\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-3\\-1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-4\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-3\\-1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-25\\-4&15\end{bmatrix}$.

10.二階矩陣 A 與 B 滿足 $A+B=O, AB=I$, 其中 $O=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}, I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, 以 A 表出$(A^3-B^3)^{-1}=$_______.

解答 $\frac{1}{2}A$

解析 $A+B=O$，則 $B=-A$，故 $A^3-B^3=2A^3$，

又由 $AB=I$，得 $-A^2=I$，即 $A(-A)=I$，故 $A^{-1}=-A$，

於是 $A^3-B^3=2A^3=2A\times A^2=2A(-I)=-2A$，

$\therefore (A^3-B^3)^{-1}=(-2A)^{-1}=\frac{1}{2}A$.

11.設 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&-1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2&-\frac{1}{2}\\-2&2\end{bmatrix}$, n 為正整數, 求(1)$A^{-1}=$_______.(2)$A^{-1}BA=$_____.(3)$B^n=$________.

解答 (1)$\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$;(2)$\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$;(3)$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1+3^n)&\frac{1}{4}(1-3^n)\\1-3^n&\frac{1}{2}(1+3^n)\end{bmatrix}$

解析 (1)$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

(2)$A^{-1}BA=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-\frac{1}{2}\\-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$.

(3)$(A^{-1}BA)^n=A^{-1}B^nA$，$\therefore B^n=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1+3^n)&\frac{1}{4}(1-3^n)\\1-3^n&\frac{1}{2}(1+3^n)\end{bmatrix}$.

12.設 $A=\begin{bmatrix}a-1&-2a\\-a&a-1\end{bmatrix}$，求

(1)若 A 的乘法反矩陣存在，則實數 a 的範圍為____________ .

(2)若 A^{-1} 的每一個元都是正的，則實數 a 的範圍為____________ .

解答 (1)$a\neq -1\pm\sqrt{2}$;(2)$a<-1-\sqrt{2}$

解析 $\det(A)=\begin{vmatrix}a-1&-2a\\-a&a-1\end{vmatrix}=-(a^2+2a-1)$,

(1)A^{-1}存在 $\det(A)\neq 0\Rightarrow a\neq -1\pm\sqrt{2}$.

(2)$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}a-1&2a\\a&a-1\end{bmatrix}$,

①$a-1>0$，$a>0\Rightarrow a>1$，此時 $\det(A)<0$，不合．

②$a-1<0$，$a<0$，$\det(A)<0\Rightarrow a<-1-\sqrt{2}$．

13.若矩陣 $A=\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & x-5 \end{bmatrix}$為不可逆矩陣，則 $x=$＿＿＿＿＿＿．

解答 6 或-1

解析 $\det(A)=\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & x-5 \end{vmatrix}=x(x-5)-6=0\Rightarrow x^2-5x-6=0\Rightarrow(x-6)(x+1)=0\Rightarrow x=6$ 或-1．

14.設 $A=\begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & y \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$,(1)若 $AB=BA$,則數對$(x,y)=$＿＿＿.(2)若 $A=A^{-1}$,則數對$(x,y)=$＿＿＿.

解答 (1)$(\frac{3}{2},\frac{7}{2})$;(2)$(-1,-2)$

解析 (1)$\begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & y \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} 4-2x & -2+x \\ 6-2y & -3+y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2x-y \\ -1 & -2x+y \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} 4-2x=1\Rightarrow x=\frac{3}{2} \\ 6-2y=-1\Rightarrow y=\frac{7}{2} \end{cases}\quad \therefore \text{數對}(x,y)=(\frac{3}{2},\frac{7}{2})．$$

(2)$A^{-1}=\frac{1}{2y-3x}\begin{bmatrix} y & -x \\ -3 & 2 \end{bmatrix}=A=\begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & y \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases} \frac{y}{2y-3x}=2 \\ \frac{-3}{2y-3x}=3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 2x-y=0 \\ 3x-2y=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}\quad \therefore \text{數對}(x,y)=(-1,-2)．$$

15.設 $A=\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，則：

(1)$P^{-1}=$＿＿＿＿＿＿．

(2)若 $B=PAP^{-1}$，則 $B^5=$＿＿＿＿＿＿．

(3)$A^5=$＿＿＿＿＿＿．

解答 (1)$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$;(2)$\begin{bmatrix} -1024 & 0 \\ 0 & 7776 \end{bmatrix}$;(3)$\begin{bmatrix} 3376 & -4400 \\ -4400 & 3376 \end{bmatrix}$

解析 (1)$\det(P)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2\Rightarrow P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$．

$$(2)B=PAP^{-1}\Rightarrow B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}．$$

$$\therefore B^2=\begin{bmatrix}-4&0\\0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&0\\0&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-4)^2&0\\0&6^2\end{bmatrix},$$

$$B^3=B^2B=\begin{bmatrix}(-4)^2&0\\0&6^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&0\\0&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-4)^3&0\\0&6^3\end{bmatrix},$$

$$B^5=B^3B^2=\begin{bmatrix}(-4)^5&0\\0&6^5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1024&0\\0&7776\end{bmatrix}.$$

(3) $B=PAP^{-1}\Rightarrow B^5=(PAP^{-1})(PAP^{-1})(PAP^{-1})(PAP^{-1})(PAP^{-1})=PA^5P^{-1}$.

$\therefore P^{-1}B^5P=P^{-1}(PA^5P^{-1})P\Rightarrow P^{-1}B^5P=A^5$.

$$A^5=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-4)^5&0\\0&6^5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-4)^5&(-4)^5\\-(6^5)&6^5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{(-4)^5+(6)^5}{2}&\frac{(-4)^5-6^5}{2}\\\frac{(-4)^5-(6)^5}{2}&\frac{(-4)^5+(6)^5}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3376&-4400\\-4400&3376\end{bmatrix}.$$