<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：103.03.24</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">2-1 平面方程式(A)</td><td>班級</td><td>二年____班</td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、填充題　(每題 10 分)

1. 一平面過點 $(2,-1,0)$ 且與二平面 $3x-y+z+3=0$ ， $2x-3y+z-6=0$ 均垂直，則平面方程式爲________.

答案： $2x-y-7z=5$

解析： $\vec{n}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\-3 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 3\\1 & 2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}3 & -1\\2 & -3\end{vmatrix}=2:-1:-7$ ， $E:2x-y-7z=4+1=5$

2. 求過 $(1,2,-2),(0,-2,1)$ 二點且與 $2x+y-3z=6$ 垂直之平面方程式=________.

答案： $9x+3y+7z=1$

解析： $\vec{u}=(-1,-4,3)$ ， $\vec{n}=(2,1,-3)$

平面之 $\vec{n}=\begin{vmatrix}-4 & 3\\1 & -3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}3 & -1\\-3 & 2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-1 & -4\\2 & 1\end{vmatrix}=9:3:7$ ， $9x+3y+7z=1$

3. 求垂直 xy 平面，且過 $A(-1,2,0),B(-3,0,5)$ 二點之平面方程式=________.

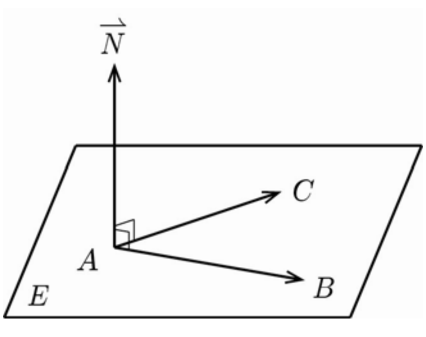
答案： $x-y=-3$

解析：垂直 xy 平面 $\Rightarrow \vec{u}=(0,0,1)$ ， $\overrightarrow{AB}=(-2,-2,5)$

$\vec{n}=\begin{vmatrix}0 & 1\\-2 & 5\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 0\\5 & -2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}0 & 0\\-2 & -2\end{vmatrix}=2:-2:0=1:-1:0$ ， $x-y=-3$

4. 包含 $A(1,2,0),B(-2,1,-1),C(2,-1,2)$ ，三點之平面方程式爲 $ax+by+cz=1$ ，則 $a+b+c=$__.

答案：2



解析：取 $\overrightarrow{AB}=(-3,-1,-1),\overrightarrow{AC}=(1,-3,2)$

$\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}-1 & -1\\-3 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & -3\\2 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-3 & -1\\1 & -3\end{vmatrix}\right)$

$=(-5,5,10)=-5(1,-1,-2)$

$\therefore E:(x-1)-(y-2)-2z=0\Rightarrow x-y-2z+1=0$

$\Rightarrow -x+y+2z=1$

$\therefore a=-1,b=1,c=2\Rightarrow a+b+c=2$

5. $A(0,1,2),B(1,1,1),C(2,-1,1),D(k,3,-1)$ ，四點共面，則： $k=$________.

答案：2

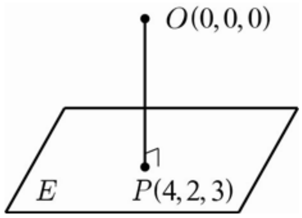
解析： $\overrightarrow{AB}=(1,0,-1),\overrightarrow{AC}=(2,-2,-1)$ ，

$\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}0 & -1\\-2 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 1\\-1 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 0\\2 & -2\end{vmatrix}\right)=(-2,-1,-2)=-(2,1,2)$

$E:2x+(y-1)+2(z-2)=0 \Rightarrow 2x+y+2z=5$
又 $D(k,3,-1)\in E \Rightarrow 2k+3-2=5 \Rightarrow k=2$

6. 若點 $P(4,2,3)$ 爲原點在平面 E 之垂足，試求平面 E 之方程式爲________.

答案：$4x+2y+3z-29=0$



解析：$\overrightarrow{OP}=(4,2,3)$ 即 E 之法向量，
$\therefore E:4(x-4)+2(y-2)+3(z-3)=0 \Rightarrow 4x+2y+3z-29=0$

7. $E:2x+3y-4z=12$ 與三坐標平面所圍之四面體體積爲________.

答案：12

解析：$E:2x+3y-4z=12 \Rightarrow \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{-3}=1$

$V=\dfrac{1}{6}|6\cdot 4\cdot(-3)|=12$

8. 設平面 E 之法向量爲 $\overrightarrow{N}=(1,3,2)$，且在三軸上之截距和爲 11，則平面 E 之方程式爲______.

答案：$x+3y+2z=6$

解析：令 $E:x+3y+2z=k \Rightarrow \dfrac{x}{k}+\dfrac{y}{\frac{k}{3}}+\dfrac{z}{\frac{k}{2}}=1 \Rightarrow k+\dfrac{k}{3}+\dfrac{k}{2}=11$

$\Rightarrow 6k+2k+3k=11k=11\times 6=66 \Rightarrow k=6 \Rightarrow E:x+3y+2z=6$

9. 一平面 $2x+y-3z=6$ 交 x 軸於 A，y 軸於 B，則線段 AB 的垂直平分面方程式爲________.

答案：$2x-4y+9=0$

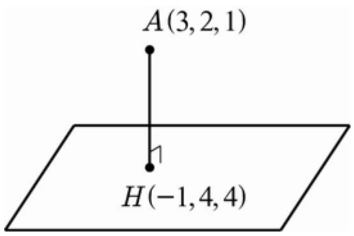
解析：x 軸：$y=0,z=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow A(3,0,0)$
y 軸：$x=0,z=0 \Rightarrow y=6 \Rightarrow B(0,6,0)$

取 $\overline{AB}$ 之中點 $(\dfrac{3}{2},3,0)$，$\overrightarrow{N}=\overrightarrow{AB}=(-3,6,0)=-3(1,-2,0)$

$\Rightarrow 1\cdot(x-\dfrac{3}{2})-2(y-3)=0 \Rightarrow 2x-4y+9=0$

10. 已知點 $A(3,2,1)$ 在平面 E 上的投影點爲 $H(-1,4,4)$，則平面 E 之方程式爲________.

答案：$4x-2y-3z+24=0$



解析：E 之法向量 $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{AH}=(-4,2,3)=-(4,-2,-3)$，
$\therefore E:4(x+1)-2(y-4)-3(z-4)=0 \Rightarrow 4x-2y-3z+24=0$

11. 設 $A(1,-2,4),B(3,1,-2),C(-3,-2,1),D(2,2,1)$，求：過 A, B, C 三點之平面方程式=________

答案：$3x-10y-4z=7$

解析：$\overrightarrow{AB}=(2,3,-6)$, $\overrightarrow{AC}=(-4,0,-3)$

$\vec{n}=\begin{vmatrix}3 & -6\\ 0 & -3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-6 & 2\\ -3 & -4\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2 & 3\\ -4 & 0\end{vmatrix}=-9:30:12=3:-10:-4$，$3x-10y-4z=7$

12. 求過二平面 $x+2y+2=0$ 及 $y+z-2=0$ 之交線，且 x 截距爲 4 之平面方程式爲________.

答案： $x+5y+3z-4=0$

解析： $(x+2y+2)+k(y+z-2)=0 \Rightarrow x+(k+2)y+kz+(-2k+2)=0$

$y=z=0 \Rightarrow x=2k-2=4$ ，$\therefore k=3$

$\therefore E: x+5y+3z-4=0$

13. 平面 E 之 x、y、z 截距依次爲 2、-1、3，則：

(1)平面 E 之方程式爲________；

(2)又平面 E 交 x 軸，y 軸，z 軸於 A、B、C，則 $\triangle ABC$ 之面積爲________；

(3)三角錐 $O-ABC$ 之體積爲________.

答案：(1) $3x-6y+2z=6$ (2) $\frac{7}{2}$ (3)1

解析：(1) $E: \frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1 \Rightarrow 3x-6y+2z=6$

(2) $A(2,0,0), B(0,-1,0), C(0,0,3)$

$\overrightarrow{AB}=(-2,-1,0), \overrightarrow{AC}=(-2,0,3)$,

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & -2\\ 3 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -2 & 0\end{vmatrix}\right)=(-3,6,-2)$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{9+36+4}=\frac{7}{2}$

(3) $V_{O-ABC}=\frac{1}{6}\left|2(-1)\cdot 3\right|=1$

14. 設 $A(-1,2,3), B(2,6,3), C(-2,4,5)$ 爲空間中的相異三點，E 爲 $\triangle ABC$ 所在平面，則：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$________

(2) $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上之正射影爲________

(3) $\triangle ABC$ 面積$=$________

(4) E 的平面方程式爲________

(5)若 $\angle BAC$ 之內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D 點，設 E 在 $\overrightarrow{AD}$ 上，且 $\overrightarrow{AE}=4\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則 $\beta=$______.

答案：(1)5 (2) $(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0)$ (3) $5\sqrt{2}$ (4) $4x-3y+5z=5$ (5) $\frac{20}{3}$

解析： $\overrightarrow{AB}=(3,4,0)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,2,2)$

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3+8+0=5$

(2) $\frac{5}{25}(3,4,0)=(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0)$

(3) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{25\cdot 9-5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

(4) $\vec{n}=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}0 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{vmatrix}=8:-6:10=4:-3:5$ ， $4x-3y+5z=5$

(5) $|\overrightarrow{AB}|=5, |\overrightarrow{AC}|=3$，$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{8}\overrightarrow{AC}$

若 $\overrightarrow{AE}=4\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，$\therefore \beta=\frac{20}{3}$

15. 若空間中 $A(2, 1, 0)$, $B(0, 1, -2)$, $C(-2, 3, -5)$, $D(3, k, -2)$四點共平面，則 k 之値爲________．

答案：7

解析：$\overline{BA}=(2, 0, 2)$, $\overline{BC}=(-2, 2, -3)$, $\overline{BA}\times\overline{BC}=(-4, 2, 4)$

$\vec{n}=(2, -1, -2)$爲平面的法向量

設平面爲 $2x-y-2z=d$，$A(2, 1, 0)$代入得 $d=3$，$\therefore$平面方程式爲 $2x-y-2z=3$

$D(3, k, -2)$代入得 $6-k+4=3$，$\therefore k=7$

16. 一平面 E 平行於平面 $2x+y+2z-1=0$ 且與三坐標平面所圍成的四面體之體積爲 9，則此平面 E 的方程式________．

答案：$2x+y+2z=\pm 6$

解析：設平面：$2x+y+2z=k$，三軸截距：$\frac{k}{2}, k, \frac{k}{2}$

$\frac{1}{6}\cdot\left|\frac{k}{2}\cdot k\cdot\frac{k}{2}\right|=9 \Rightarrow k=6, -6$，$\therefore E$: $2x+y+2z=\pm 6$