高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：103.03.20					
範圍	1-2.3.4 空間向量(C)	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 （每題 10 分 ）

49. 三次方程式 $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ -1 & x+2 & 3 \\ -1 & 2 & x+3 \end{vmatrix}=0$，則 $x=$________.

答案：0，0，−4

解析：

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ -1 & x+2 & 3 \\ -1 & 2 & x+3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+4 & 2 & 3 \\ x+4 & x+2 & 3 \\ x+4 & 2 & x+3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (x+4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & x+2 & 3 \\ 1 & 2 & x+3 \end{vmatrix}=0$$

×1 ×1

$$\Rightarrow (x+4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (x+4)\cdot x^2=0 \Rightarrow x=0,0,-4$$

50. 方程式 $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0$，則 $x=$________.

答案：3，4

解析：

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 9-x^2 & 3-x & 0 \\ 16-x^2 & 4-x & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 9-x^2 & 3-x \\ 16-x^2 & 4-x \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (3-x)(4-x)\begin{vmatrix} 3+x & 1 \\ 4+x & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (x-4)(x-3)(-1)=0 \Rightarrow x=3,4\ (\text{凡得孟})$$

51. 不等式 $\begin{vmatrix} \log_2 x & \log_2 x & 1 \\ \log_2 x & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}\le 0$ 的解爲________.

答案：$2\le x\le 4$

解析：$x>0$

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} \log_2 x & \log_2 x & 1 \\ \log_2 x & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \times(-1) \\ \times(-1) \end{array} = \begin{vmatrix} \log_2 x & \log_2 x & 1 \\ 0 & 1-\log_2 x & 0 \\ 2-\log_2 x & 1-\log_2 x & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 1-\log_2 x \\ 2-\log_2 x & 1-\log_2 x \end{vmatrix}$$

$$=(2-\log_2 x)(1-\log_2 x)=(\log_2 x-1)(\log_2 x-2)\le 0$$

$$\Rightarrow 1\le \log_2 x\le 2 \Rightarrow \log_2 2\le \log_2 x\le \log_2 4 \Rightarrow 2\le x\le 4$$

52. $\triangle ABC$ 中，$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的對邊分別爲 a, b, c，則 $\begin{vmatrix} 1 & a & \sin A \\ 2 & b & \sin B \\ 3 & c & \sin C \end{vmatrix} =$________.

答案：0

解析：由正弦定理知 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$（$R$：外接圓半徑）

即第二行與第三行成比例故 $\begin{vmatrix} 1 & a & \sin A \\ 2 & b & \sin B \\ 3 & c & \sin C \end{vmatrix} = 0$

53. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 212 & 279 & 214 \\ 215 & 413 & 216 \end{vmatrix} =$________.

答案：-1090

解析：

$$原式 = 5\begin{vmatrix} 212 & 214 \\ 215 & 216 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 212 & 2 \\ 215 & 1 \end{vmatrix} = 5|212-430| = 5\times(-218) = -1090$$

$\times(-1)$

54. 行列式 $\begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 104 & 105 & 106 \\ 107 & 108 & 109 \end{vmatrix}$ 之值爲________.

答案：0

解析：

$$\begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 104 & 105 & 106 \\ 107 & 108 & 109 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 101 & 1 & 2 \\ 104 & 1 & 2 \\ 107 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\times(-1)$ $\times(-1)$

55. 設 $\vec{a} = (-1,2,3), \vec{b} = (4,1,-2)$，試求：$\vec{a}\times\vec{b} =$________.

答案：$(-7,10,-9)$

解析：$\vec{a}\times\vec{b} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\right) = (-7,10,-9)$

56. 若 $\begin{vmatrix} a & x & \ell \\ b & y & m \\ c & z & n \end{vmatrix} = 6$，則 $\begin{vmatrix} 4y & 4b & 4m \\ 3z & 3c & 3n \\ x & a & \ell \end{vmatrix} =$________.

答案：-72

解析：所求 $= 12\begin{vmatrix} y & b & m \\ z & c & n \\ x & a & \ell \end{vmatrix} = -12\begin{vmatrix} b & y & m \\ c & z & n \\ a & x & \ell \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} a & x & \ell \\ c & z & n \\ b & y & m \end{vmatrix} = -12\begin{vmatrix} a & x & \ell \\ b & y & m \\ c & z & n \end{vmatrix} = -12\times6 = -72$

57. 已知空間中兩向量 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ ，且 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(2,-3,6)$ ，$|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|=7$ ，$\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 的夾角爲 θ ，則 $\sin\theta=$________.

答案：$\dfrac{1}{7}$

解析：$\because|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}|\sin\theta\Rightarrow\sqrt{4+9+36}=7\times7\sin\theta\Rightarrow7=49\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{1}{7}$

58. 設 $A(1,-5,2),B(4,3,-5),C(1,2,6)$，則以 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 爲兩邊的平行四邊形面積爲________．

答案：$3\sqrt{794}$

解析：$\overrightarrow{AB}=(3,8,-7)$, $\overrightarrow{AC}=(0,7,4)$ $\therefore\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}8&-7\\7&4\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}3&-7\\0&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&8\\0&7\end{vmatrix}\right)=(81,-12,21)$

平行四邊形面積$=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=3\times\sqrt{794}=3\sqrt{794}$

59. 由 $\vec{a}=(1,2,1)$, $\vec{b}=(2,0,4)$, $\vec{c}=(2,2,-1)$三向量決定的平行六面體體積爲________．

答案：16

解析：$V=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=\left|\left(\begin{vmatrix}2&1\\0&4\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1&1\\2&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\2&0\end{vmatrix}\right)\cdot(2,2,-1)\right|=|(8,-2,-4)\cdot(2,2,-1)|=|16-4+4|=16$

60. 若 $A(1,2,3),B(2,4,6),C(3,5,4),D(2,3,d)$四點共平面，則 d 之值________．

答案：1

解析：$\overrightarrow{AB}=(1,2,3)$, $\overrightarrow{AC}=(2,3,1)$, $\overrightarrow{AD}=(1,1,d-3)$

四點共面$\Rightarrow\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\1&1&d-3\end{vmatrix}=0\Rightarrow3d-9+2+6-9-1-4d+12=0\quad\therefore d=1$

61. 若 $\begin{vmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{vmatrix}=7$，則 $\begin{vmatrix}2c&b+c&a\\2i&h+i&g\\-2f&-e-f&-d\end{vmatrix}=$________．

答案：-14

解析：$\begin{vmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{vmatrix}=7$

$$\begin{vmatrix}2c&b+c&a\\2i&h+i&g\\-2f&-e-f&-d\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}c&b+c&a\\i&h+i&g\\-f&-e-f&-d\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}c&b+c&a\\i&h+i&g\\f&e+f&d\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}c&b&a\\i&h&g\\f&e&d\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}a&b&c\\g&h&i\\d&e&f\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a&g&d\\b&h&e\\c&i&f\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{vmatrix}=-2\times7=-14$$

62. $L_1:x+2y+3=\lambda x,L_2:x+2y+3=\lambda y,L_3:x+2y+3=\lambda$ ，若 L_1 、 L_2 、 L_3 交於一點，則 λ 之值爲________.

答案：0，0，6

解析：$L_1:(1-\lambda)x+2y+3=0$, $L_2:x+(2-\lambda)y+3=0$, $L_3:x+2y+(3-\lambda)=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 3 \\ 6-\lambda & 2-\lambda & 3 \\ 6-\lambda & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$\times 1 \quad \times 1$

$$\Rightarrow (6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (6-\lambda)\cdot\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda=0,0,6$$

63. 空間中一點 $P(4,-3,2)$ 在 x 軸、y 軸、z 軸之正射影分別爲 Q、R、S，則：
(1)$\triangle QRS$ 之面積爲_______；(2) $\triangle QRS$ 在 xy 平面之正射影所得之三角形面積爲________.

答案：(1) $\sqrt{61}$ (2)6

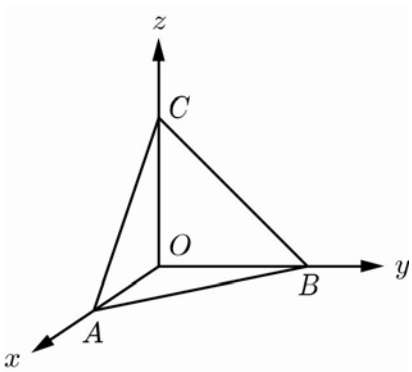
解析：(1) $Q(4,0,0), R(0,-3,0), S(0,0,2)$，$\overrightarrow{QR}=(-4,-3,0), \overrightarrow{QS}=(-4,0,2)$

$$\overrightarrow{QR}\times\overrightarrow{QS}=\left(\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & -4\\ 2 & -4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-4 & -3\\ -4 & 0\end{vmatrix}\right)=(-6,8,-12)$$

$$\triangle QRS=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{QR}\times\overrightarrow{QS}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{36+64+144}=\sqrt{9+16+36}=\sqrt{61}$$

(2)所求即 $\triangle OQR=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6$

64. 若三線段 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$ 兩兩互相垂直，而 $\overline{OA}=4$，$\overline{OB}=6$，$\overline{OC}=6$，則 $\triangle ABC$ 之面積爲________.



答案：$6\sqrt{17}$

解析：取 $A(4,0,0), B(0,6,0), C(0,0,6)$

$\overrightarrow{AB}=(-4,6,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-4,0,6)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & -4\\ 6 & -4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-4 & 6\\ -4 & 0\end{vmatrix}\right)=(36,24,24)$$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{36^2+24^2+24^2}=\frac{1}{2}\cdot 12\sqrt{9+4+4}=6\sqrt{17}$$

65. $A(2,1,1), B(1,4,2), C(-1,2,4)$，則：(1)$\triangle ABC$ 之面積爲______；(2)點 A 到 $\overleftrightarrow{BC}$ 之距爲_______.

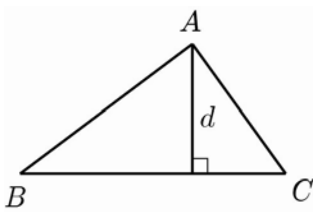
答案：(1) $4\sqrt{2}$ (2) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

解析：(1) $\overrightarrow{AB}=(-1,3,1), \overrightarrow{AC}=(-3,1,3)$，$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -3 & 1\end{vmatrix}\right)=(8,0,8)$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{64+64}=4\sqrt{2}$$

(2) $\overline{BC}=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$

$$\triangle ABC=4\sqrt{2}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}d \Rightarrow d=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$



66. 若 k 爲實數，空間中四個點 $A(0,1,0)$，$B(3,-1,2)$，$C(2,3,-1)$，$D(0,2,k)$，則 $\triangle ABC$ 的面積爲________；若四面體 $ABCD$ 的體積爲 2，則 $k=$________.

答案：$\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$，$\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{-19}{10}$

解析：$\overrightarrow{AB}=(3,-2,2),\overrightarrow{AC}=(2,2,-1)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}\right)=(-2,7,10)$$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{4+49+100}=\frac{1}{2}\sqrt{153}=\frac{3}{2}\sqrt{17}$$

$$\overrightarrow{AD}=(0,1,k)\text{，}2=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}3 & -2 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & k\end{vmatrix}\right|\Rightarrow 12=|6k+4+3+4k|$$

$$\Rightarrow 10k+7=\pm 12\Rightarrow 10k=5\text{ 或 }-19\quad\Rightarrow k=\frac{1}{2}\text{ 或 }-\frac{19}{10}$$

67. 平面上 $A(2,1)$，$B(0,-3)$，C 點在直線 L：$x-y=5$ 上，若 $\triangle ABC$ 之面積為 10，則 C 點坐標為________.

答案：$(8,3)$ 或 $(-12,-17)$

解析：設參數 $C(t,t-5)\in L$

$$10=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}t & t-5 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 1\end{vmatrix}\right|\Rightarrow 20=|t-6+3t-2t+10|=|2t+4|$$

$$\Rightarrow t+2=\pm 10\Rightarrow t=8,-12\Rightarrow C(8,3)\text{ 或 }(-12,-17)$$

68. 若 a 為實數，$\begin{cases}3x-2y=4a-11\\ 2x+3y=21-5a\\ 3x+y=20-7a\end{cases}$ 有共同解，則 $a=$________，又其解為________.

答案：$2,(1,3)$

解析：方程組有解 $\Rightarrow$ 三線共點

$$\begin{vmatrix}3 & -2 & 4a-11\\ 2 & 3 & 21-5a\\ 3 & 1 & 20-7a\end{vmatrix}\begin{matrix}\times 2\\ \times(-3)\\ \end{matrix}$$

$$=\begin{vmatrix}9 & 0 & 29-10a\\ -7 & 0 & 16a-39\\ 3 & 1 & 20-7a\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}9 & 29-10a\\ -7 & 16a-39\end{vmatrix}=-(144a-351+203-70a)=-(74a-148)=148-74a=0\Rightarrow a=2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x-2y=-3\\ 2x+3y=11\end{cases}\Rightarrow x=1,y=3\Rightarrow(1,3)$$

69. 若 $a\in\mathbb{R}$，且三向量 $\vec{a}=(2,3,1),\vec{b}=(2a,1,0),\vec{c}=(1,a,6)$ 不共面，則由此三向量所張之平行六面體的體積最大值為________.

答案：151

解析：$V=\left|\begin{vmatrix}2&3&1\\2a&1&0\\1&a&6\end{vmatrix}\right|=\left|12+2a^2-1-36a\right|=\left|2a^2-36a+11\right|=\left|2(a^2-18a+81)-151\right|$

$=\left|2(a-9)^2-151\right|$　　當 $a=9$，V 有最大值 151

70. 空間中三向量 $2\vec{a}+5\vec{b},\vec{b},2\vec{c}$ 所張的平行六面體的體積爲 80，則由三向量 $2\vec{a}+3\vec{c},2\vec{b},3\vec{b}-4\vec{c}$ 所張之平行六面體的體積爲________.

答案：320

解析：$80=\left|\begin{vmatrix}2\vec{a}+5\vec{b}\\\vec{b}\\2\vec{c}\end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix}2\vec{a}\\\vec{b}\\2\vec{c}\end{vmatrix}\right|=4\left|\begin{vmatrix}\vec{a}\\\vec{b}\\\vec{c}\end{vmatrix}\right|\Rightarrow\left|\begin{vmatrix}\vec{a}\\\vec{b}\\\vec{c}\end{vmatrix}\right|=20$

$V=\left|\begin{vmatrix}2\vec{a}+3\vec{c}\\2\vec{b}\\3\vec{b}-4\vec{c}\end{vmatrix}\right|=2\left|\begin{vmatrix}2\vec{a}+3\vec{c}\\\vec{b}\\3\vec{b}-4\vec{c}\end{vmatrix}\right|=2\left|\begin{vmatrix}2\vec{a}+3\vec{c}\\\vec{b}\\-4\vec{c}\end{vmatrix}\right|=8\left|\begin{vmatrix}2\vec{a}+3\vec{c}\\\vec{b}\\\vec{c}\end{vmatrix}\right|=8\left|\begin{vmatrix}2\vec{a}\\\vec{b}\\\vec{c}\end{vmatrix}\right|$

$=16\left|\begin{vmatrix}\vec{a}\\\vec{b}\\\vec{c}\end{vmatrix}\right|=16\times20=320$

71. 設空間中四點 $A(0, 0, 1), B(1, 1, –1), C(–2, 1, 3), D(3, k, –2)$共平面，則 k 之值爲________.

答案：$-\dfrac{3}{2}$

解析：$\overline{AB}=(1, 1, –2)$, $\overline{AC}=(–2, 1, 2)$, $\overline{AD}=(3, k, –3)$

A, B, C, D 共平面，則 $\begin{vmatrix}1&1&-2\\-2&1&2\\3&k&-3\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1&1&-2\\0&3&-2\\0&k-3&3\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}3&-2\\k-3&3\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow 9+2(k–3)=0\Rightarrow 2k+3=0\Rightarrow k=\dfrac{-3}{2}$

72. 若 $a,b,c,x,y,z\in\mathbb{R}$，且 $a^2+b^2+c^2=1,x^2+y^2+z^2=4$，則 $\begin{vmatrix}a&b&c\\x&y&z\\2&3&6\end{vmatrix}$ 的最大值爲________.

答案：14

解析：所求即以 $(a,b,c),(x,y,z),(2,3,6)$ 所圍之平行六面體的體積

故當此三個向量兩兩垂直時有最大值

$V=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{4+9+36}=\sqrt{1}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{49}=14$