高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：103.03.20					
範圍	1-2.3.4 空間向量(B)	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 （每題 10 分 ）

25. 設 $\vec{a}=(-4,2,1)$，若 $\vec{b}$ 與 $\vec{a}$ 反方向，且 $|\vec{b}|=1$，則 $\vec{b}=$________.

答案：$(\frac{4}{\sqrt{21}},\frac{-2}{\sqrt{21}},\frac{-1}{\sqrt{21}})$

解析：$|\vec{a}|=\sqrt{16+4+1}=\sqrt{21}$ ，$\therefore \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=(\frac{-4}{\sqrt{21}},\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{1}{\sqrt{21}})$ ，所求$=(\frac{4}{\sqrt{21}},\frac{-2}{\sqrt{21}},\frac{-1}{\sqrt{21}})$

26. $\vec{a}=(2,3,-1),\vec{b}=(6,x,y),\vec{c}=(z,1,1)$，若 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$，且 $\vec{a}\perp\vec{c}$，則 $x=$____，$y=$____，$z=$____.

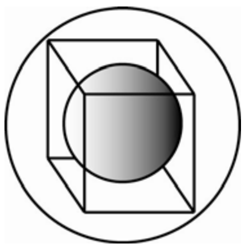
答案：$9,-3,-1$

解析：$\vec{a}\,//\,\vec{b}\Rightarrow\frac{2}{6}=\frac{3}{x}=\frac{-1}{y}\Rightarrow x=9,y=-3$

$\vec{a}\perp\vec{c}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{c}=2z+3-1=0\Rightarrow z=-1$

$\therefore x=9,y=-3,z=-1$

27. 已知半徑為 r 的球體體積為 $\frac{4}{3}\pi r^3$，則邊長為 2 之正立方體，其內切球與外接球所形成之球殼間之體積為________.



答案：$\frac{4\pi}{3}(3\sqrt{3}-1)$

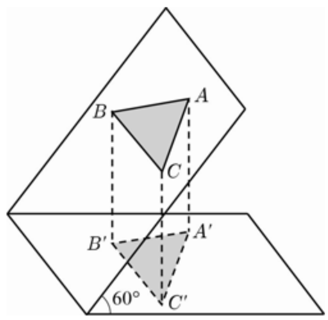
解析：設內切球之半徑為 r，外接球之半徑為 R

$2r=2\Rightarrow r=1$

$2R=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}\Rightarrow R=\sqrt{3}$

$V=\frac{4\pi}{3}\cdot(\sqrt{3})^3-\frac{4\pi}{3}\cdot 1^3=\frac{4\pi}{3}(3\sqrt{3}-1)$

28. 平面 E 上有一$\triangle ABC$，若其三邊長為 4、5、7，又 E 與水平面之夾角為 $60°$，則此三角形在水平面上之正射影面積為___.



答案：$2\sqrt{6}$

解析：$S=\frac{1}{2}(4+5+7)=8$ ，$\triangle ABC=\sqrt{8\times4\times3\times1}=4\sqrt{6}$

$\therefore\triangle A'B'C'=\triangle ABC\cdot\cos 60°=4\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}=2\sqrt{6}$

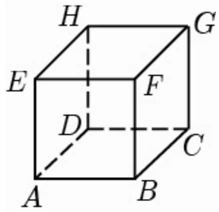
29. 設 $\vec{a}=(1,2,1),\vec{b}=(-2,1,2)$，求 $\vec{a}+2\vec{b}$ 及 $2\vec{a}-\vec{b}$ 之夾角為___.

答案：$90°$

解析：$\vec{a}+2\vec{b}=(-3,4,5)$　　$2\vec{a}-\vec{b}=(4,3,0)$

$\cos\theta=\frac{0}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{25}}=0$　　$\therefore\theta=90°$

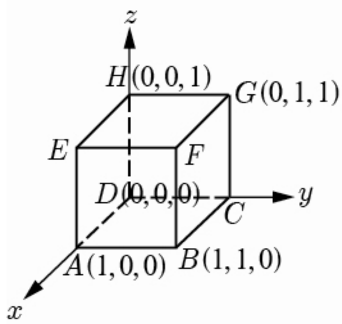
30. 右圖為一正方體，若兩對角線 $\overrightarrow{AG}$ 、 $\overrightarrow{BH}$ 所夾之夾角為 θ，求 $\cos\theta=$____.



答案：$\frac{1}{3}$

解析：先坐標化 $D(0,0,0)$ $A(1,0,0)$ $C(0,1,0)$ $H(0,0,1)$ 則 $\overrightarrow{AG}=(-1,1,1)$

$\overrightarrow{BH}=(-1,-1,1)$ ， $\cos\theta=\frac{1-1+1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$



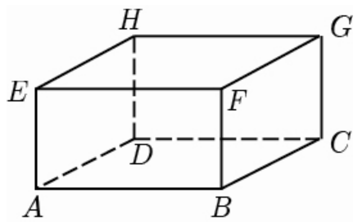
31. 設 x,y,z 皆為正數， $x+y+z=1$ ，則 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}$ 之最小值為________.

答案：25

解析：$[(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{z})^2]\cdot[(\sqrt{\frac{1}{x}})^2+(\sqrt{\frac{2}{y}})^2+(\sqrt{\frac{2}{z}})^2]\geq(1+2+2)^2\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}\geq 25$

32. 如圖長方體 $ABCD\text{-}EFGH$ ，若 $\overline{AB}=1,\overline{AD}=2,\overline{AE}=3$ ，則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EC}=$________.

答案：5

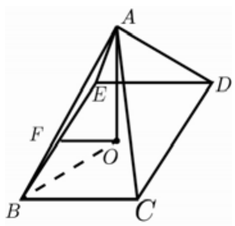


解析：坐標化 $D(0,0,0)$ ，則 $A(2,0,0),C(0,1,0),H(0,0,3),E(2,0,3)$

$\therefore\ \overrightarrow{AC}=(-2,1,0),\overrightarrow{EC}=(-2,1,-3)$

$\therefore\ \overline{AC}\cdot\overline{EC}=4+1+0=5$

33. 四角錐 $A\text{-}BCDE$ 中，若底面為一正方形，側面均為等腰三角形，若正方形邊長為4，四角錐高為3，且側面與底面所夾銳角為 θ，則 $\cos\theta=$____



答案：$\frac{2}{\sqrt{13}}$

解析：坐標化正方形之正中心 $(0,0,0)$, $F(0,-2,0),A(0,0,3)$

$\therefore\ \overrightarrow{FA}=(0,2,3),\overrightarrow{FO}=(0,2,0)$ ， $\cos\theta=\frac{4}{\sqrt{4+9}\sqrt{4}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$

34. $A(2,1,2),B(4,0,3),C(1,2,0)$ ，求：

(1) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上之正射影為____________. (2) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上之正射影長為________.

(3) B 點在 $\overleftrightarrow{AC}$ 上垂足之坐標為___________.

答案：(1)$(\frac{5}{6},\frac{-5}{6},\frac{5}{3})$ (2)$\frac{5\sqrt{6}}{6}$ (3)$(\frac{17}{6},\frac{1}{6},\frac{11}{3})$

解析：$\overrightarrow{AB}=(2,-1,1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,1,-2)$

(1)$\frac{(2,-1,1)\cdot(-1,1,-2)}{6}(-1,1,-2)=\frac{-2-1-2}{6}(-1,1,-2)=(\frac{5}{6},\frac{-5}{6},\frac{5}{3})$

(2)$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}=\frac{5}{\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{6}$

(3)$(x-2,y-1,z-2)=(\frac{5}{6},\frac{-5}{6},\frac{5}{3})\Rightarrow(x,y,z)=(\frac{17}{6},\frac{1}{6},\frac{11}{3})$

35. $x,y,z\in\mathbb{R}$，$2x+2y+z+5=0$，則：$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2$ 之最小值爲________.

答案：4

解析：$\left[(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2\right]\left[2^2+2^2+1^2\right]\ge\left[2(x-1)+2(y+2)+(z-3)\right]^2$

$\Rightarrow 9\left[(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2\right]\ge(2x+2y+z-1)^2$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2\ge\frac{1}{9}(-5-1)^2=4$　∴最小值爲 4

36. 若 $x,y\in\mathbb{R}$，則 $\frac{x+2y+3}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ 之最大值爲________；最小值爲________.

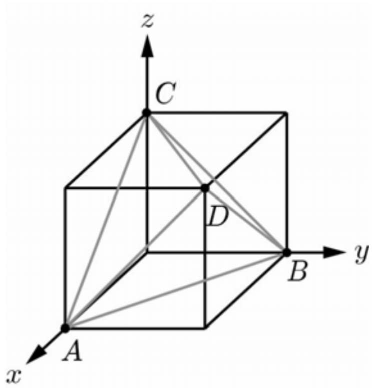
答案：$\sqrt{14},-\sqrt{14}$

解析：$\because (x^2+y^2+1^2)(1^2+2^2+3^2)\ge(x+2y+3)^2$

$\Rightarrow \frac{(x+2y+3)^2}{x^2+y^2+1}\le 14\Rightarrow -\sqrt{14}\le\frac{x+2y+3}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\le\sqrt{14}$

∴最大值爲 $\sqrt{14}$，最小值爲 $-\sqrt{14}$

37. 正四面體 $ABCD$ 之中心爲 Q，則：$\cos\angle AQB=$________.



答案：$-\frac{1}{3}$

解析：如圖，取 $A(2,0,0),B(0,2,0),C(0,0,2),D(2,2,2)\Rightarrow Q(1,1,1)$

$\therefore \overrightarrow{QA}=(1,-1,-1),\overrightarrow{QB}=(-1,1,-1)$

$\because \overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=|\overrightarrow{QA}|\,|\overrightarrow{QB}|\cos\theta$，$\therefore -1=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=-\frac{1}{3}$

38. 空間中三點 $A(6,3,4),B(3,3,0),C(4,1,3)$，若 $\overline{AH}$ 垂直 $\overline{BC}$ 於 H 點，則垂足 H 點的坐標爲___.

答案：$(\frac{57}{14},\frac{6}{7},\frac{45}{14})$

解析：$\overrightarrow{BA}=(3,0,4)$；$\overrightarrow{BC}=(1,-2,3)$

正射影 $=\frac{3+12}{14}(1,-2,3)=(\frac{15}{14},\frac{-15}{7},\frac{45}{14})=(x-3,y-3,z)\Rightarrow(x,y,z)=(\frac{57}{14},\frac{6}{7},\frac{45}{14})$

39. 若 $5x+6y+2z=24$，求 $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2$ 之最小值=________.

答案：$\frac{121}{65}$

解析：$[(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2][5^2+6^2+2^2]\ge(5x-5+6y-24+2z-6)^2$

$\Rightarrow[(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2]\ge\frac{121}{65}$

40. 設 a,b,c 均爲正數，則 $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c})$ 的最小值爲________.

答案：36

解析：$[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2][(\sqrt{\frac{1}{a}})^2+(\sqrt{\frac{4}{b}})^2+(\sqrt{\frac{9}{c}})^2]\ge(1+2+3)^2$

$\therefore \min=36$

41. 設 x, y, z 爲實數，且 $4x^2+y^2+z^2=36$，則 $2x-2y+3z$ 的最大值爲________．

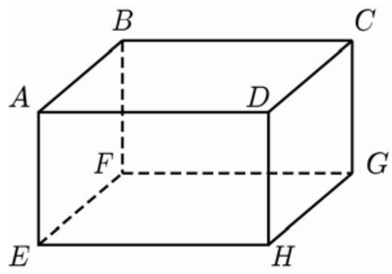
答案：$6\sqrt{14}$

解析：由柯西不等式得：

$[(2x)^2+y^2+z^2][1+(-2)^2+3^2]\ge(2x-2y+3z)^2$

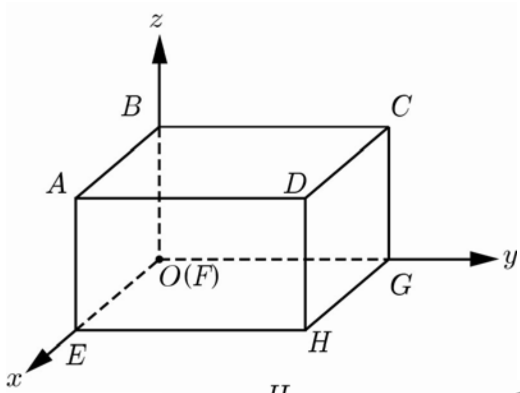
$\Rightarrow 36\cdot 14\ge(2x-2y+3z)^2\Rightarrow -6\sqrt{14}\le 2x-2y+3z\le 6\sqrt{14}$，即得最大值$6\sqrt{14}$

42. 如圖爲長方體 $ABCD-EFGH$，若 $\overline{AB}=\overline{AE}=1$, $\overline{AD}=2$，則 $\cos\angle BAC=$________．



答案：$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

解析：將長方體坐標化如下圖：



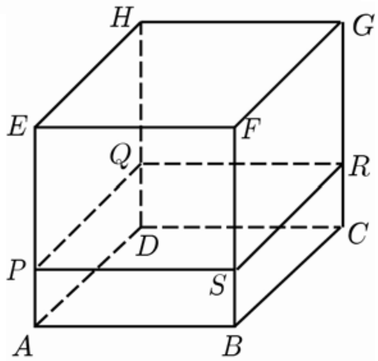
可得坐標：

$A(1,0,1), B(0,0,1), C(0,2,1), D(1,2,1), E(1,0,0),$
$F(0,0,0), G(0,2,0), H(1,2,0)$

得 $\overline{AB}=(-1,0,0)$，$\overline{AC}=(-1,2,0)$

得 $\cos\angle BAC=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}||\overline{AC}|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

43. 如圖一正方體 $ABCD\text{-}EFGH$，被一平面截成一四邊形 $PQRS$，若 Q, S 爲稜之中點，$\overline{EP}$ ： $\overline{PA}=2$ ：1，則 $\cos\angle QPS=$________.



答案：$\dfrac{1}{37}$

解析：坐標化 $D(0,0,0), A(6,0,0)$，則 $P(6,0,2), Q(0,0,3)$　$S(6,6,3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(-6,0,1), \overrightarrow{PS}=(0,6,1)$

$\cos\theta=\dfrac{0+0+1}{\sqrt{36+1}\sqrt{36+1}}=\dfrac{1}{37}$

44.若 $x-2y+3z=14$，則：$x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z$ 之最小值爲____；此時數對 $(x,y,z)=$___.

答案：42，$(1,-2,3)$

解析：$x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z=(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)+(z^2+6z+9)-14$

$=\left[(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2\right]-14$

$\because\left[(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2\right]\left[1^2+(-2)^2+3^2\right]\ge\left[x+1-2y+4+3z+9\right]^2$

$\Rightarrow 14\left[(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2\right]\ge(x-2y+3z+14)^2$

$\Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2\ge\dfrac{1}{14}(14+14)^2=\dfrac{28^2}{14}=56$

$\Rightarrow\left[(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2\right]-14\ge 56-14=42$

$\therefore$最小值爲 42

此時，設 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+3}{3}=t\Rightarrow x=t-1, y=2-2t, z=3t-3$

又 $x-2y+3z=t-1-4+4t+9t-9=14\Rightarrow 14t=28\Rightarrow t=2\Rightarrow x=1, y=-2, z=3$

45. 若$a,b,c\in\mathbb{R},2a+3b+6c=196$，$(2a+3b+6c)^2=(2^2+3^2+6^2)(a^2+b^2+c^2)$，若

$\overrightarrow{v}=(a-3,b-5,c-7)$，則：$|\overrightarrow{v}|=$________.

答案：$11\sqrt{3}$

解析：由柯西不等式知：$(2^2+3^2+6^2)(a^2+b^2+c^2)\ge(2a+3b+6c)^2$

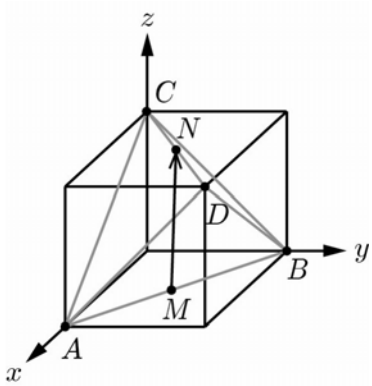
等號成立時，$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{6}$

設$a=2t,b=3t,c=6t$

又$2a+3b+6c=4t+9t+36t=49t=196\Rightarrow t=4$

$\therefore a=8,b=12,c=24\Rightarrow\overrightarrow{v}=(5,7,17)$

$\therefore|\overrightarrow{v}|=\sqrt{25+49+289}=\sqrt{363}=11\sqrt{3}$



46. 正四面體$ABCD$中，M、N分別爲$\overline{AB}$、$\overline{CD}$的中點，則$\overrightarrow{AD}$與$\overrightarrow{MN}$的夾角爲________.

答案：45°

解析：如圖，取$A(2,0,0),B(0,2,0),C(0,0,2),D(2,2,2)$

$\therefore M(1,1,0),N(1,1,2)\Rightarrow\overrightarrow{AD}=(0,2,2),\overrightarrow{MN}=(0,0,2)$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{MN}=|\overrightarrow{AD}|\,|\overrightarrow{MN}|\cos\theta\Rightarrow 4=\sqrt{4+4}\cdot 2\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\theta=45°$

47. 平面$E:2x-y+2z+4=0$，$F:yz$平面，則平面E,F夾角的正弦值爲________.

答案：$\frac{\sqrt{5}}{3}$

解析：$\overrightarrow{n_1}=(2,-1,2)$　　$\overrightarrow{n_2}=(1,0,0)$　　$\cos\theta=\frac{2\cdot 1}{3\cdot 1}=\frac{2}{3}$　　$\therefore\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$

48. 若$\begin{vmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{vmatrix}=6$，則$\begin{vmatrix}2a&-6b&2c\\d&-3e&f\\g&-3h&i\end{vmatrix}=$________.

答案：-36

解析：$\begin{vmatrix}2a&-6b&2c\\d&-3e&f\\g&-3h&i\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a&-3b&c\\d&-3e&f\\g&-3h&i\end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{vmatrix}=-6\times 6=-36$