高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：103.03.20					
範圍	1-2.3.4 空間向量	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 （每題 10 分 ）

1. 空間中 $A(3,2,-1)$, $B(1,5,6)$ ，若 P 為 xz 平面上任一點，則 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值為________.

答案：$\sqrt{102}$

解析：做 A 對 xz 平面之對稱點 $A'(3,-2,-1) \Rightarrow \overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值 $=\overline{A'B}=\sqrt{4+49+49}=\sqrt{102}$

2. $A(1,3,4)$, $B(3,4,6)$, $C(5,6,4)$，若 $\angle A$ 之內角角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，則 D 之坐標為________.

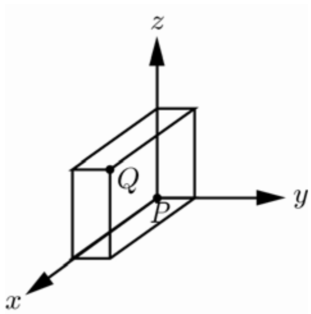
答案：$(\frac{15}{4},\frac{19}{4},\frac{21}{4})$

解析：$\overline{AB}=\sqrt{4+1+4}=3$ $\overline{AC}=\sqrt{16+9}=5$ 根據內分比性質 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}=3:5$

$\therefore D=\frac{5}{8}B+\frac{3}{8}C=\frac{5}{8}(3,4,6)+\frac{3}{8}(5,6,4)=(\frac{15}{4},\frac{19}{4},\frac{21}{4})$

3. 設 $A(-2,1,9), B(-4,6,3)$ ，求線段 AB 在 xy 平面上之正射影長為________.

答案：$\sqrt{29}$



解析：A, B 在在 xy 平面上之正射影分別為 $A_0(-2,1,0)$ 、 $B_0(-4,6,0)$

線段 AB 在 xy 平面上之正射影長 $\overline{A_0B_0}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$

4. 一房子的兩面牆壁和天花板交於 P 處，且牆壁與天花板兩兩互相垂直，在空間中有一隻蒼蠅與其中一面牆壁距離 1 公尺，與另一面牆壁距離為 8 公尺，且與 P 點距離為 9 公尺，則蒼蠅與天花板的距離是___公尺.

答案：4

解析：設 $P(0,0,0), Q(8,1,c)$ 又 $\overline{PQ}=9$ $\Rightarrow 64+1+c^2=81$ $\Rightarrow c^2=16 \Rightarrow c=4$

5. 空間中二點 $A(2,2,1), B(3,-1,3)$ ，在 x 軸上一點 P 使 $\overline{PA}=\overline{PB}$ ，則 P 的坐標為________.

答案：(5, 0, 0)

解析：設 $P(a,0,0)$ ，$\because \overline{PA}^2=\overline{PB}^2$

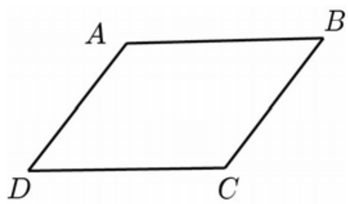
$\therefore (a-2)^2+4+1=(a-3)^2+1+9 \Rightarrow -4a+9=-6a+19 \Rightarrow 2a=10 \Rightarrow a=5$ $\therefore P(5,0,0)$

6. 設一長方體的長、寬、高分別為 12、8、4 單位長，則其任意兩頂點間最長的距離為______單位長.

答案：$4\sqrt{14}$

解析：$\sqrt{12^2+8^2+4^2}=\sqrt{4^2(9+4+1)}=4\sqrt{14}$

7. 設平行四邊形 $ABCD$ 其中三頂點坐標為 $A(1,7,3), B(-3,18,-4)$, $C(4,10,-9)$，則 D 點的坐標為________.



答案：$(8,-1,-2)$

解析：設 $D(x,y,z)$ ，$\because \overline{AC}$ 的中點即 $\overline{BD}$ 的中點

$\therefore (\frac{x-3}{2},\frac{y+18}{2},\frac{z-4}{2})=(\frac{1+4}{2},\frac{7+10}{2},\frac{3-9}{2})$

$\Rightarrow x-3=5, y+18=17, z-4=-6 \Rightarrow x=8, y=-1, z=-2$ $\therefore D(8,-1,-2)$

8. 點 $A(x,y,z)$ 在第一卦限內，且到 x 軸，y 軸，z 軸之距離分別為 $\sqrt{10}$ 、 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{13}$ ，則點 A 坐標為________.

答案：(2, 3, 1)

解析：

$$\begin{cases}\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{10}\\ \sqrt{z^2+x^2}=\sqrt{5}\\ \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{13}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^2+z^2=10\\ z^2+x^2=5\\ x^2+y^2=13\end{cases}\Rightarrow 2(x^2+y^2+z^2)=28$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=14\Rightarrow x^2=4, y^2=9, z^2=1\Rightarrow x=2, y=3, z=1\quad\therefore A(2,3,1)$$

9. 若a,b爲實數，且點$A(a,-1,3),B(5,b,2),C(4,-5,5)$三點共線，則：$3a+b=$________.

答案：15

解析：$\because A, B, C$ 共線，$\therefore \overrightarrow{AB}=t\,\overrightarrow{AC}, t\in\mathbb{R}\Rightarrow(5-a,b+1,-1)=t(4-a,-4,2)$

$$\Rightarrow\frac{5-a}{4-a}=\frac{b+1}{-4}=\frac{-1}{2}=t\Rightarrow\begin{cases}10-2a=a-4\\ b+1=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{14}{3}\\ b=1\end{cases}\qquad\therefore 3a+b=15$$

10. 設$\vec{u}=(1,-2,3),\vec{v}=(-1,1,-1)$，若$\vec{w}=\vec{u}+t\,\vec{v}, t\in\mathbb{R}$，則當 t 爲___時，$\vec{w}$ 之長度有最小值___.

答案：2，$\sqrt{2}$

解析：$\vec{w}=\vec{u}+t\,\vec{v}=(1,-2,3)+t(-1,1,-1)=(-t+1,t-2,-t+3)$

$$|\vec{w}|^2=(-t+1)^2+(t-2)^2+(-t+3)^2=3t^2-12t+14=3(t^2-4t+4)+2=3(t-2)^2+2$$

$$\Rightarrow|\vec{w}|=\sqrt{3(t-2)^2+2}\qquad \text{當 } t=2 \text{ 時，}|\vec{w}|\text{ 有最小值 }\sqrt{2}$$

11. $A(3,-2,1),B(6,-4,2)$在 y 軸上找一 P 點，使得$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$最小，則 P 點坐標爲________.

答案：$(0,-3,0)$

解析：令 $P(0,t,0)$

$$\Rightarrow\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=9+(t+2)^2+1+36+(t+4)^2+4=(t+2)^2+(t+4)^2+50$$

$$\text{當 } t=\frac{-2-4}{2}=-3 \text{ 時有 } \min\Rightarrow P(0,-3,0)$$

12. $\triangle ABC$ 中,$A(-2,1,3)$,$B(0,-1,2)$,$C(4,3,0)$,則$\triangle ABC$ 之面積=______.

答案：$4\sqrt{5}$

解析：$\because\overline{AB}=\sqrt{4+4+1}=3,\overline{BC}=\sqrt{16+16+4}=6,\overline{CA}=\sqrt{36+4+9}=7,$

設 $s=\dfrac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})\Rightarrow s=8,$

$\therefore\triangle ABC$ 面積$=\sqrt{8\times5\times2\times1}=4\sqrt{5}$.

13. 設向量$\vec{a}$=(1, 1, 1), $\vec{b}$=(0, 2, 3)，若$\overrightarrow{AB}=3\vec{a}-2\vec{b}$，且點 A 坐標爲(2, –1, 3)，則點 B 的坐標爲_________．

答案：(5, –2, 0)

解析：$\overrightarrow{AB}=3\vec{a}-2\vec{b}$=3(1, 1, 1)–2(0, 2, 3)=(3, –1, –3)

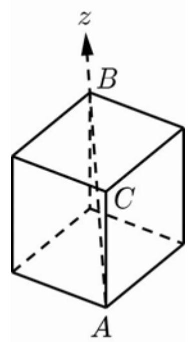
設點 $B(x, y, z)$，則(x–2, y+1, z–3)=(3, –1, –3)，即 x=5, y=–2, z=0，故點 B(5, –2, 0)

14. 設空間坐標中四點，A(0, 0, 1), B(1, –1, 0), C(0, 1, –1), D，若$\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$，則點 D 的坐標爲________．

答案：$(-1, \frac{5}{2}, -1)$

解析：設點 $D(x, y, z)$，則 $(-x, -y, 1-z)-2(1-x, -1-y, -z)+3(-x, 1-y, -1-z)=(0, 0, 0)$

即得：$\begin{cases} -x-2+2x-3x=0 \\ -y+2+2y+3-3y=0 \\ 1-z+2z-3-3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{5}{2} \\ z=-1 \end{cases}$ 即點 $D(-1, \frac{5}{2}, -1)$

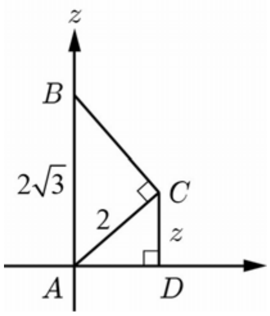


15. 有一邊長爲 2 的正立方體，今置頂點 A 於空間坐標系中之原點 $(0, 0, 0)$，置頂點 B 於正 z 軸上，則頂點 C 之 z 坐標爲________.

答案：$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

解析：$\because \overline{AB}=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3} \Rightarrow \overline{BC}=\sqrt{12-4}=2\sqrt{2}$

又 $\triangle ABC \sim \triangle CAD$，$\therefore \frac{z}{2}=\frac{2}{2\sqrt{3}} \Rightarrow z=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$



16. 設 $\triangle ABC$ 之重心爲 $G(2,-1,3)$，而 $B(4,-2,5), C(1,0,1)$，則：$|\overrightarrow{AG}|=$_____.

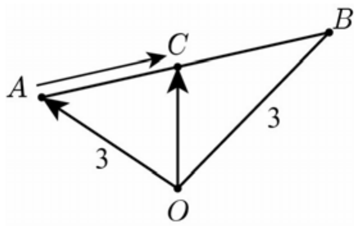
答案：1

解析：$\because \overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=(6,-3,9)-(4,-2,5)-(1,0,1)=(1,-1,3)$

$\therefore A(1,-1,3) \Rightarrow \overrightarrow{AG}=(1,0,0) \Rightarrow |\overrightarrow{AG}|=1$

17. 設 $\overline{OA}=(-2, 2, 1)$, $\overline{OB}=(1, -2, -2)$，點 C 在線段 AB 上且 $\overline{OC}=\overline{OA}+t\overline{AB}$，其中 t 爲實數，若 $\overline{OC}$ 平分 $\angle AOB$，則 t 之値爲________．



答案：$\frac{1}{2}$

解析：如圖，$|\overline{OA}|=\sqrt{4+4+1}=3$、$|\overline{OB}|=\sqrt{1+4+4}=3$，即 $|\overline{OA}|=|\overline{OB}|$

又 $\overline{OC}$ 平分 $\angle AOB$，即得點 C 爲 $\overline{AB}$ 之中點，得 $\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

$\therefore \overline{OC}=\overline{OA}+\frac{1}{2}\overline{AB}$，即 $t=\frac{1}{2}$

18. 空間中 $ABCD$ 爲正四面體，若 $A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 2)$，則 D 點坐標爲________．

答案：$(2, 2, 2)$ 或 $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$

解析：設 $D(a, b, c)$，則 $\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DC}=2\sqrt{2}$

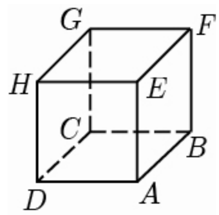
$\Rightarrow (a-2)^2+b^2+c^2=a^2+(b-2)^2+c^2=a^2+b^2+(c-2)^2=8$

$\Rightarrow a=b=c \Rightarrow 3a^2-4a+4=8$

$\Rightarrow 3a^2-4a-4=0 \Rightarrow (a-2)(3a+2)=0$ $\quad \therefore a=2$ 或 $a=-\frac{2}{3}$ $\quad$ 故 $D(2, 2, 2)$ 或 $D(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$

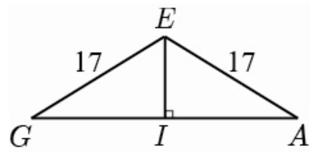
19. 如圖，有一長方體的長度分別爲 $\overline{AE}=17, \overline{AB}=8, \overline{AD}=15$，以 A 爲原點 $(0,0,0)$，G 點置於正 z 軸上，則 E 點之 z 坐標爲________.

答案：$\frac{17}{2}\sqrt{2}$



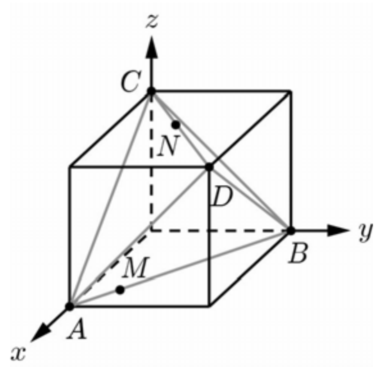
解析：$\overline{GE}=\sqrt{8^2+15^2}=17\qquad\therefore\overline{GE}=\overline{AE}$

$\triangle GEA$中，$\overline{EI}=\frac{17\cdot 17}{17\sqrt{2}}=\frac{17}{\sqrt{2}}=\overline{AI}\qquad\therefore E$ 點之 z 坐標為 $\frac{17}{2}\sqrt{2}$



$\therefore C(17,-13,24)$

20. 邊長為 6 的正四面體 $ABCD$，若 $M\in\overline{AB},N\in\overline{CD}$ ，且 $\overline{AM}=\sqrt{2}$， $\overline{CN}=3\sqrt{2}$ ，則 $\overline{MN}=$______.



答案：$2\sqrt{11}$

解析：取 $A(6,0,0),B(0,6,0),C(0,0,6),D(6,6,6)\Rightarrow M(5,1,0),N(3,3,6)$

$\overline{MN}=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-6)^2}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$

21. 設 $\vec{a}=(2,-1,3),\vec{b}=(x,-y,z)$，若 $x^2+y^2+z^2=56$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 之最小值為____________.

答案：-28

解析：$\vec{a}\cdot\vec{b}=2x-y+3z$

$(x^2+y^2+z^2)(2^2+(-1)^2+3^2)\geq(2x-y+3z)^2\Rightarrow 56\cdot 14\geq(2x+y+3z)^2$

$\therefore -28\leq 2x-y+3z\leq 28\qquad \min=-28$

22. 設 $A(2,-2,1),B(3,0,2),C(0,1,2)$ ，則 $(\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{BC})=$________.

答案：18

解析：$\overrightarrow{AC}=(-2,3,1)\qquad\overrightarrow{AB}=(1,2,1)\qquad\overrightarrow{BC}=(-3,1,0)$

$(\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{BC})=[(-2,3,1)-2(1,2,1)][(2,-3,-1)+(-6,2,0)]$

$=(-4,-1,-1)(-4,-1,-1)=16+1+1=18$

23. 空間坐標系上，△ ABC 之三頂點 $A(1,2,-2),B(0,3,2),C(2,1,-1)$，則 $\cos\angle BAC$ 之值為____.

答案：$\frac{\sqrt{6}}{9}$

解析：$\overrightarrow{AB}=(-1,1,4)$ 、 $\overrightarrow{AC}=(1,-1,1)$ ， $\cos\angle BAC=\frac{|-1-1+4|}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{9}$

24. 若 $\vec{a}=(0,1,-4),\vec{b}=(2,0,3)$ ， $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ 且 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 夾90° ，則 $t=$________.

答案：$\frac{12}{13}$

解析：$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(2t,1,-4+3t)$

$\vec{b}\perp\vec{c}\Rightarrow(2,0,3)(2t,1,-4+3t)=0\Rightarrow 4t+0-12+9t=0\Rightarrow t=\frac{12}{13}$