高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：103.02.24					
範圍	1-1 空間概念	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 （每題 10 分 ）

1.空間中決定一平面的條件有四種：

(1)________________，(2)________________，(3)________________，(4)______________ .

解答 (1)不共線的相異三點;(2)一線及不在此線上一點;(3)二相交相異直線;(4)二平行直線

2.空間中任意二直線的相互關係有四種：(1)________，(2)________，(3)________，(4)________ .

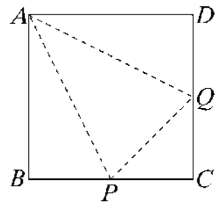
解答 (1)平行;(2)重合;(3)相交於一點;(4)不共平面（歪斜線）

3.空間中一直線 L 及一平面 E 的相互關係有三種：(1)__________,(2)__________,(3)__________.

解答 (1)L 與 E 相交於一點;(2)L 與 E 平行（不相交）;(3)L 在 E 上

4.空間中任意二平面的相互關係有三種：(1)__________，(2)__________，(3)__________ .

解答 (1)平行;(2)重合;(3)恰相交於一直線



5.如下圖，正方形 $ABCD$ 的邊長為 6，而 P，Q 各為 $\overline{BC}$ ，$\overline{CD}$ 的中點，今將此正方形沿虛線向上摺起，使 B，C，D 三點重合，令此重合點為 R，則四面體 A-PQR 之體積為__________ .

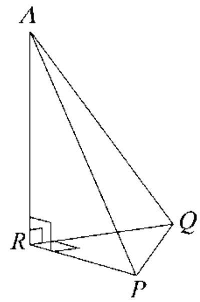
解答 9

解析 所摺得的四面體，如圖（B，C，D 重合為 R），

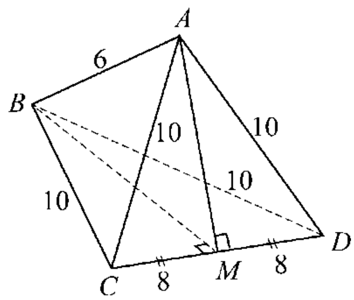
$\therefore \overline{AR}=\overline{AB}=6,\ \overline{RP}=\overline{RQ}=\overline{CQ}=3$ ， 又 $\overline{RP}\perp\overline{RQ}$，$\overline{AR}\perp\overline{RQ}$，$\overline{AR}\perp\overline{RP}$ ，

即 $\angle PRQ=\angle C=90°, \angle PRA=\angle B=90°, \angle ARQ=\angle D=90°$,

$\therefore$四面體的體積$=\dfrac{1}{3}$(△RPQ 面積)$\cdot\ \overline{AR}=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot3)\cdot6=9$.



6.設四面體 $ABCD$ 中，$\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=10$，$\overline{AB}=6$，$\overline{CD}=16$，若平面 ACD 與平面 BCD 的夾角為 θ，則 $\sin\theta$ 之值為__________ .



解答 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解析 如下圖，M 為 $\overline{CD}$ 中點，$\therefore \overline{CM}=\overline{MD}=8$，

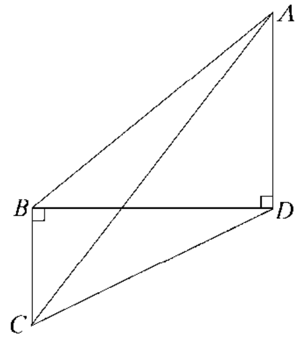
$\overline{AM}\perp\overline{CD}$，$\overline{BM}\perp\overline{CD}$ 且 $\overline{AC}=\overline{AD}=10$，$\overline{BC}=\overline{BD}=10$，$\therefore \overline{AM}=\overline{BM}=6$，

在△ABM 中，$\overline{AB}=\overline{AM}=\overline{BM}=6$，$\therefore\angle AMB=60°=\theta$，

$\therefore \sin\theta=\sin60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

7.如下圖，四面體 $ABCD$，已知 $\overline{BC}\perp\overline{BD}$，$\overline{AD}\perp$平面 BCD，且 $\overline{BC}=7$，$\overline{AB}=24$，$\overline{AD}=15$，(1) $\overline{AC}$ 的長度為__________ .

(2)若平面 ABD 和平面 ACD 所夾二面角的度量為 θ，則 $\sin\theta$ 的值為_______ .



解答 (1) 25;(2) $\dfrac{7}{20}$

解析 (1) $\overline{AD}\perp$平面 $BCD \Rightarrow \overline{AD}\perp\overline{BD}$，$\overline{AD}\perp\overline{CD}$，

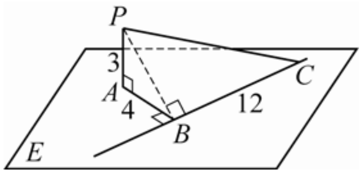
$\because \overline{AD}\perp\overline{BD}$，$\overline{BD}\perp\overline{BC}$，$\therefore$由三垂線定理可知 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$，

△ABC 中，$\overline{BC}=7$，$\overline{AB}=24$， 故 $\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{24^2+7^2}=25$.

(2)因$\overline{AD}\perp\overline{BD}$，$\overline{AD}\perp\overline{CD}$ $\Rightarrow\angle BDC$為二面角B-AD-C的平面角，即$\angle BDC=\theta$,

$\therefore\sin\theta=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}}=\dfrac{7}{20}$.

8.設點A，B，C在平面E上，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$，$\overline{PA}$垂直平面$E$於點$A$，若$\overline{PA}=3$，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=12$，則$\overline{PC}=$__________ .



解答 13

解析 $\overline{PA}\perp\overline{AB}$，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$，$\therefore\overline{PB}\perp\overline{BC}$（三垂線定理），

$\therefore\overline{PB}=\sqrt{\overline{PA}^2+\overline{AB}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，又$\overline{PC}=\sqrt{\overline{PB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$.

9.平面E與平面F所夾銳角θ，E上一個三角形的邊長分別為5，12，13，且此三角形在平面F上的正射影也是一個三角形，其面積為$15\sqrt{3}$，則$\theta=$__________ .

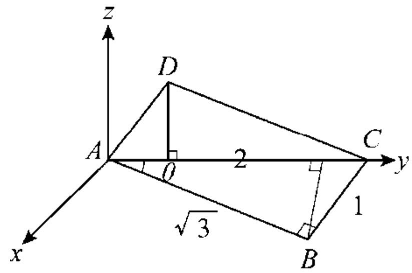
解答 30°

解析 邊長5，12，13的三角形為直角三角形，其面積=$\dfrac{1}{2}\times5\times12=30$，

$\therefore 30\cos\theta=15\sqrt{3}\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，知$\theta=30°$.

10.將長方形$ABCD$沿著對角線$\overline{AC}$摺起，使平面ABC與平面ACD互相垂直，已知$\overline{AB}=\sqrt{3}$，$\overline{BC}=1$，則$\overline{BD}$之長=__________ .

解答 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$



解析 建立空間坐標系，使A作原點，C在y軸正方向，$B(0,s,t)$在xy平面上，$D(p,q,0)$在yz平面上（如下圖），
直角三角形ABC, ADC分別在xy平面上，yz平面上

$\overline{AC}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2\Rightarrow C(0,2,0)$

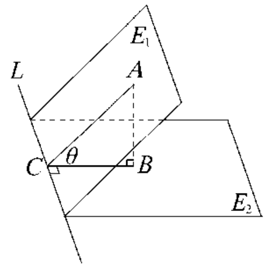
直角三角形ABC, ADC斜邊$\overline{AC}$上的高$=\dfrac{\sqrt{3}\times1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=t=p$

比列中項性質$1^2=s\times2\Rightarrow s=\dfrac{1}{2}, \sqrt{3}^2=q\times2\Rightarrow q=\dfrac{3}{2}$

$\therefore B(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},0)$，$D(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})\Rightarrow\overline{BD}=\sqrt{(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-0)^2+(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2})^2+(0-\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

11.設兩平面E_1，E_2交於一直線L，平面E_1有一點A，A在平面E_2之正射影點B，自B作L的垂直線垂足為C，若$\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=12$，則(1)$\overline{BC}=$__________ .(2)兩平面之銳交角為__________度 .

解答 (1)$6\sqrt{3}$;(2)30



解析 (1)$\because\overline{AB}\perp E_2$，$\therefore\overline{AB}\perp\overline{BC}$ $\Rightarrow\angle ABC=90°$，

由畢氏定理：$\overline{BC}^2+\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$，

$\because\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=12$，$\therefore\overline{BC}^2=12^2-6^2=108\Rightarrow\overline{BC}=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$.

(2)$\because \overline{AB} \perp E_2$，$\overline{BC} \perp L$ 於 C，$\therefore$由三垂線定理知 $\overline{AC} \perp L$ 於 C

$\Rightarrow \angle ACB$ 為此二面角的平面角，令之為 θ，則 $\sin\theta = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$，$\therefore \theta = 30°$．

12.一長方形紙片 $ABCD$，$\overline{AB} = 15$，$\overline{AD} = 20$，沿著對角線 $\overline{AC}$ 摺起，使平面 BAC 與平面 DAC 互相垂直，則此時 B，D 兩點間的距離為____________．(參閱 No.10)

解答 $\sqrt{337}$

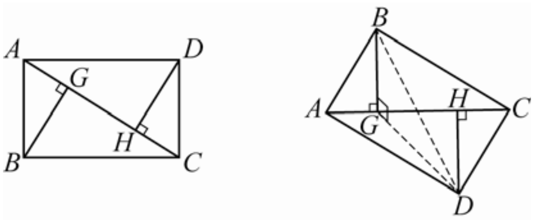
解析 $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = 25$，自 B，D 兩點分別向 $\overline{AC}$ 作垂線，垂足為 G，H，

設 $\overline{AG} = x$，$\overline{CG} = 25 - x$，則 $15^2 - x^2 = 20^2 - (25 - x)^2$

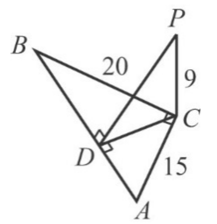
$\Rightarrow 225 - x^2 = 400 - (625 - 50x + x^2) \Rightarrow 50x = 450 \Rightarrow x = 9$，故 $\overline{GH} = 25 - 2 \times 9 = 7$，

又平面 BAC 與平面 ADC 互相垂直，所以 $\overline{BG} \perp \overline{GD}$，則 $\overline{BG} = \overline{DH} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$，

故 $\overline{BD} = \sqrt{\overline{BG}^2 + \overline{GH}^2 + \overline{DH}^2} = \sqrt{12^2 + 7^2 + 12^2} = \sqrt{337}$．



13.直角△ABC 中，$\angle C$ 為直角，$\overline{AC} = 15$，$\overline{BC} = 20$，自 C 點作平面 ABC 的垂直線段 $\overline{PC}$，已知 $\overline{PC} = 9$，則 P 點到斜邊 $\overline{AB}$ 的垂直距離為____________．



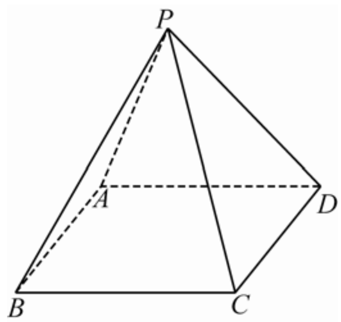
解答 15

解析 設 $\overline{PD} \perp \overline{AB}$ 於 D，三垂線定理，$\overline{PC} \perp$ 平面 ABC 且 $\overline{PD} \perp \overline{AB}$，則 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$，

$\overline{CD}$ 即為直角△ABC 斜邊上的高，則 $\overline{CD} = \dfrac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{15 \times 20}{\sqrt{15^2 + 20^2}} = 12$，

在直角△PCD 中，$\overline{PC} = 9$，$\overline{CD} = 12$，故 $\overline{PD} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$．

14.如圖，A，B，C，D 共平面，而 P 點在平面 $ABCD$ 外，則 A，B，C，D，P 五點共可決定____________個平面．



解答 7

解析 平面 PAB，平面 PBC，平面 PCD，平面 PDA，平面 PAC，平面 PBD，平面 $ABCD$ 共 7 個．

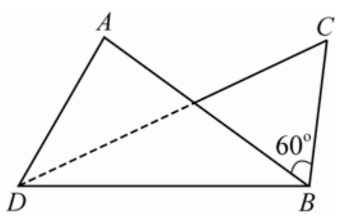
15.如圖，將一張正方形的紙 $ABCD$ 沿著對角線 BD 摺起使得 $\angle ABC = 60°$，則平面 ABD 與平面 BCD 的夾角為____________度．

解答 90

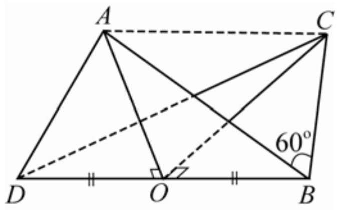
解析 取 $\overline{BD}$ 的中點 O，則 $\overline{AO} \perp \overline{BD}$，$\overline{CO} \perp \overline{BD}$，

設正方形的邊長為 a，則 $\overline{AO} = \overline{CO} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$，

在△ABC 中，$\overline{AB} = \overline{BC} = a$，$\angle ABC = 60°$



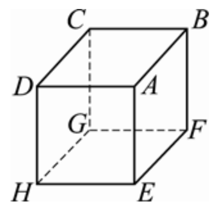
$\Rightarrow \triangle ABC$ 為正△且 $\overline{AC}=a$，



在 $\triangle AOC$ 中，由餘弦定理得：$\cos(\angle AOC)=\dfrac{(\frac{a}{\sqrt{2}})^2+(\frac{a}{\sqrt{2}})^2-a^2}{2\times\frac{a}{\sqrt{2}}\times\frac{a}{\sqrt{2}}}=0$，

$\therefore \angle AOC=90°$，即二平面 ABD 與 BCD 的夾角為 $90°$．

16.附圖為一單位正立方體 $ABCD\text{-}EFGH$（即稜長 1），則



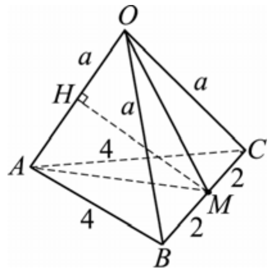
(1)四面體 $ACFH$ 的表面積為____________，(2)體積為____________．

解答 (1) $2\sqrt{3}$;(2) $\dfrac{1}{3}$

解析 由圖知四面體 $ACFH$ 為正四面體，$\overline{AC}=\sqrt{2}$，

$\therefore$表面積 $=4\times[\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2})^2]=2\sqrt{3}$，體積 $=\dfrac{1}{3}$ 正立方體體積 $=\dfrac{1}{3}$．

17.有一四面體 $OABC$，它的一個底面 ABC 是邊長為 4 的正三角形，且知 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=a$；如果直線 OA 與直線 BC 間的公垂線段長（亦即此兩直線間的距離）是 $\sqrt{3}$，則 $a=$____________．（以最簡分數表示）



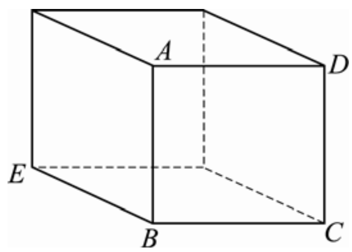
解答 $\dfrac{8}{3}$

解析 取 $\overline{BC}$ 的中點 M，作 $\overline{MH}\perp\overline{OA}$，則 $\overline{MH}$ 為 $\overline{OA}$ 的公垂線段長，$\therefore \overline{MH}=\sqrt{3}$，

$\because \overline{AM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 4=2\sqrt{3}$，$\overline{MH}=\sqrt{3}$，$\therefore \overline{AH}=3 \Rightarrow \overline{OH}=a-3$，又 $\overline{OM}=\sqrt{a^2-4}$，

在△MOH 中，$(a-3)^2+(\sqrt{3})^2=(\sqrt{a^2-4})^2 \Rightarrow a=\dfrac{8}{3}$．

18.空間中一長方體如圖所示，其中 $ABCD$ 為正方形，$\overline{BE}$ 為長方體的一邊．已知 $\cot\angle AEB=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$，則 $\cot\angle CED=$____________．

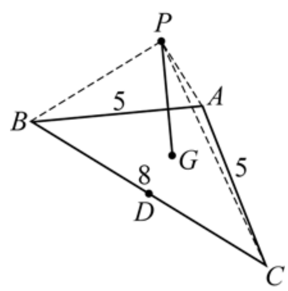


解答 $\dfrac{7}{5}$

解析 $\cot\angle AEB=\dfrac{2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow$ 可設 $\overline{AB}=5$，$\overline{BE}=2\sqrt{6}$，$\because ABCD$ 為正方形，$\therefore \overline{BC}=\overline{CD}=5$

$\Rightarrow \overline{CE}=\sqrt{5^2+(2\sqrt{6})^2}=7$，又 $\overline{CD}\perp\overline{CE} \Rightarrow \cot\angle CED=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{CD}}=\dfrac{7}{5}$．

19.設△ABC 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}=5$, $\overline{BC}=8$, G 為其重心，D 為 $\overline{BC}$ 中點．若將 G 點垂直拉升至與平面 ABC 距離為 2 處得點 P，則 $\overline{PC}$ 之長為____________．



解答 $\sqrt{21}$

解析 △GCD 中，$\overline{CD}=4$，得 $\overline{GD}=\dfrac{1}{3}\overline{AD}=\dfrac{1}{3}\sqrt{5^2-4^2}=1$，故

$\overline{GC}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$，又 $\overline{PG}=2$，可得 $\overline{PC}=\sqrt{2^2+17}=\sqrt{21}$．