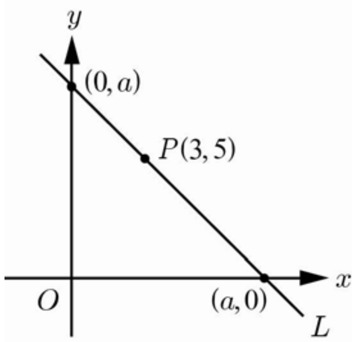
高雄市明誠中學　高二數學平時測驗　　日期：102.11.18					
範圍	1-5;2-1 測量、直線	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題　(每題 10 分)

1.　試求過 $P(3,5)$ 且在兩軸上截距相等的直線為________.



答案：$x+y=8$

解析：

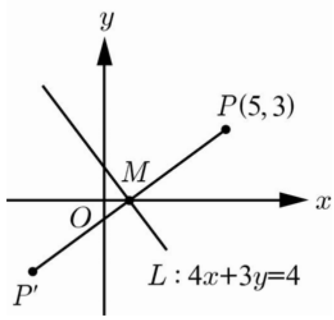
如圖，設 $L:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}=1$，$P(3,5)$ 在 L 上 $\Rightarrow \dfrac{3}{a}+\dfrac{5}{a}=\dfrac{8}{a}=1 \Rightarrow a=8$

$\therefore L:\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{8}=1 \Rightarrow x+y=8$

2　$P(5,3)$ 對 $L:4x+3y=4$ 的對稱點座標為________，投影點座標為________.

答案：$(-3,-3),(1,0)$

解析：



設 P 關於 L 之對稱點為 $P'(a,b)$，取 $\overline{PP'}$ 之中點 $M(\dfrac{a+5}{2},\dfrac{b+3}{2})\in L$

$\Rightarrow 4\dfrac{a+5}{2}+3\dfrac{b+3}{2}=4 \Rightarrow 4a+20+3b+9=8 \Rightarrow 4a+3b=-21$

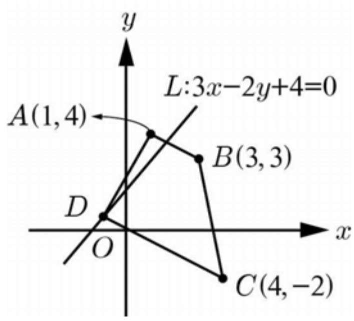
又 $L:3y=-4x+4 \Rightarrow y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3} \Rightarrow m_L=-\dfrac{4}{3}$

又 $\overline{PP'}\perp L$，$\therefore m_{\overline{PP'}}\cdot m_L=-1 \Rightarrow m_{\overline{PP'}}=\dfrac{3}{4}=\dfrac{b-3}{a-5} \Rightarrow 4b-12=3a-15$

$\Rightarrow 3a-4b=3 \Rightarrow \begin{cases}4a+3b=-21\\3a-4b=3\end{cases} \Rightarrow a=b=-3 \Rightarrow P'(-3,-3) \Rightarrow M(1,0)$

3　梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}//\overline{CD}$，$A(1,4)$、$B(3,3)$、$C(4,-2)$，$D$ 在直線 $L:3x-2y+4=0$ 上，則 D 點座標為________.

答案：$(-1,\dfrac{1}{2})$



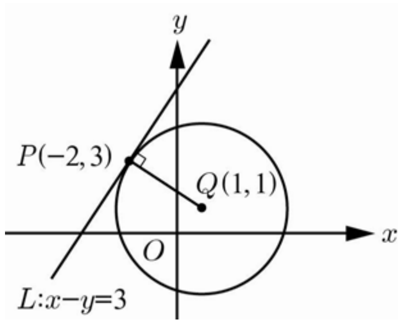
解析：

$m_{\overline{AB}}=\dfrac{4-3}{1-3}=\dfrac{1}{-2}$,

$\overleftrightarrow{CD}=y+2=-\dfrac{1}{2}(x-4) \Rightarrow 2y+4=-x+4 \Rightarrow x+2y=0$

$D:\begin{cases}x+2y=0\\3x-2y=-4\end{cases} \Rightarrow x=-1, y=\dfrac{1}{2}$，$\therefore D(-1,\dfrac{1}{2})$

4　座標平面上，圓 O 的圓心為 $Q(1,1)$，若直線 L 與圓 O 相切於 $P(-2,3)$，則 L 的方程式為________.



答案：$3x-2y+12=0$

解析：

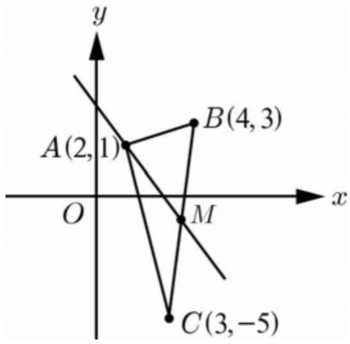
$\because \overline{PQ}\perp L$，$\therefore m_{\overline{PQ}}=\dfrac{3-1}{-2-1}=\dfrac{2}{-3} \Rightarrow m_L=\dfrac{3}{2}$，

$L: y-3=\frac{3}{2}(x+2) \Rightarrow 2y-6=3x+6 \Rightarrow 3x-2y+12=0$

5　設 $A(2,1), B(4,3), C(3,-5)$，則過 A 且平分 $\triangle ABC$ 面積之直線為________.

答案：$4x+3y=11$

解析：



所求即為過 A 與 $\overline{BC}$ 邊上中點 M 的直線，取 $M(\frac{7}{2},-1)$

$\overleftrightarrow{AM}: y-1=\dfrac{1-(-1)}{2-\frac{7}{2}}(x-2)$

$\Rightarrow y-1=\dfrac{2}{-\frac{3}{2}}(x-2) \Rightarrow 3y-3=-4x+8 \Rightarrow 4x+3y=11$

6　過點 $P(2,-3)$ 且平行於直線 $L: 2x-3y-5=0$ 之直線為________.

答案：$2x-3y-13=0$

解析：$L: 2x-3y-5=0 \Rightarrow 3y=2x-5 \Rightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3} \Rightarrow m_L=\frac{2}{3}=m_\ell$

設 $\ell: y+3=\frac{2}{3}(x-2) \Rightarrow 3y+9=2x-4 \Rightarrow 2x-3y-13=0$

7.　過點 $P(1,2)$ 且垂直於直線 $L: 3x+2y-1=0$ 之直線為________.

答案：$2x-3y+4=0$

解析：$L: 3x+2y-1=0 \Rightarrow 2y=-3x+1 \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2} \Rightarrow m_L=-\frac{3}{2}$

$\because L \perp \ell$，$\therefore m_L \cdot m_\ell=-1 \Rightarrow m_\ell=\frac{2}{3}$

$\therefore \ell: y-2=\frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow 3y-6=2x-2 \Rightarrow 2x-3y+4=0$

8.　過 $L_1: 5x-4y+7=0$ 與 $L_2: x+2y-7=0$ 的交點，且與 $L_3: x+y=1$ 垂直的直線方程式為____.

答案：$x-y+2=0$

解析：$\begin{cases} 5x-4y=-7 \cdots\cdots ① \\ x+2y=7 \cdots\cdots ② \end{cases}$

①+②$: 6x-2y=0 \Rightarrow y=3x$ 代入②：得 $x=1, y=3 \Rightarrow P(1,3)$

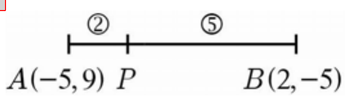
$L_3: y=-x+1 \Rightarrow m_3=-1$，$\because \ell \perp L_3$，$\therefore m_\ell=1$

$\ell: y-3=1\cdot(x-1) \Rightarrow x-y+2=0$

9.　座標平面上兩點 $A(-5,9), B(2,-5)$，若 P 點在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:5$，則 P 點座標為______.

答案：$(-3,5)$

解析：



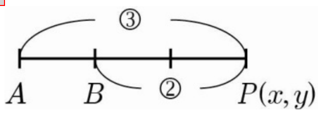
$P(\frac{5\times(-5)+2\times 2}{7}, \frac{5\times 9+2\times(-5)}{7}) \Rightarrow P(-3,5)$

10.　直線 L 上兩點 $A(5,2), B(1,-1)$，若 P 點在 $\overline{AB}$ 延長線段上，且 $\overline{PA}:\overline{PB}=3:2$，則 P 點座標

為________.

答案：$(-7,-7)$

解析：



設 $P(x,y)$，又 $\overline{AB}:\overline{BP}=1:2 \Rightarrow (1,-1)=(\dfrac{1\cdot x+2\times 5}{3},\dfrac{1\cdot y+2\times 2}{3})$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+10=3 \\ y+4=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-7 \\ y=-7 \end{cases}，\therefore P(-7,-7)$$

11. 若 $A(2,4),B(-3,5),C(2-3a,2a-3)$ 在同一直線上，則 $a=$________.

答案：5

解析：$\because m_{\overline{AB}}=m_{\overline{BC}}$，$\therefore \dfrac{5-4}{-3-2}=\dfrac{(2a-3)-5}{(2-3a)-(-3)} \Rightarrow \dfrac{1}{-5}=\dfrac{2a-8}{5-3a}$

$$\Rightarrow 5-3a=-10a+40 \Rightarrow 7a=35 \Rightarrow a=5$$

12. 已知兩相異直線 $L_1: x+ay+(a-3)=0$, $L_2: ax+(a+2)y-2=0$ 平行，則 $a=$________.

答案：-1

解析：$\dfrac{1}{a}=\dfrac{a}{a+2}\neq\dfrac{3-a}{2} \Rightarrow a^2=a+2 \Rightarrow a^2-a-2=0 \Rightarrow (a-2)(a+1)=0 \Rightarrow a=2,-1$

檢查：$a=-1: \dfrac{1}{-1}=\dfrac{-1}{1}\neq\dfrac{4}{2}, a=2: \dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$　故取 $a=-1$

13. 已知 $L_1: ax+(a+2)y+1=0$ 與 $L_2: x+ay+(2-a)=0$ 垂直，則 $a=$________.

答案：$0,-3$

解析：$L_1:(a+2)y=-ax-1 \Rightarrow y=\dfrac{-a}{a+2}x-\dfrac{1}{a+2} \Rightarrow m_1=\dfrac{-a}{a+2}$

$L_2: ay=-x+(a-2) \Rightarrow y=-\dfrac{1}{a}x+\dfrac{a-2}{a} \Rightarrow m_2=-\dfrac{1}{a}$

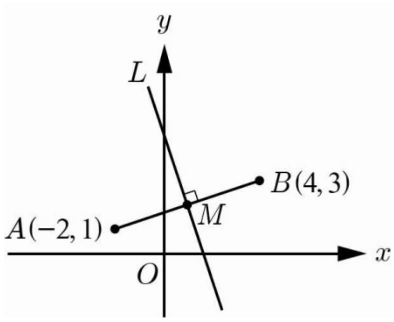
$\because L_1 \perp L_2$，$\therefore m_1\cdot m_2=-1 \Rightarrow \dfrac{-a}{a+2}\left(-\dfrac{1}{a}\right)=-1$

$\Rightarrow -a=a^2+2a \Rightarrow a^2+3a=0 \Rightarrow a(a+3)=0 \Rightarrow a=0,-3$

14. 已知平面上兩點 $A(-2,1),B(4,3)$，則 $\overline{AB}$ 的垂直平分線方程式為__.

答案：$3x+y=5$

解析：



取 $\overline{AB}$ 的中點 $M(1,2)$，$m_{\overline{AB}}=\dfrac{3-1}{4-(-2)}=\dfrac{1}{3}$

$\because L\perp\overline{AB}$，$\therefore m_L=-3$

$L: y-2=-3(x-1) \Rightarrow 3x+y=5$

15. $\triangle ABC$ 之三頂點座標為(3, 6), (2, 2), (–1, –5)，則 $\triangle ABC$ 之重心座標為________.

答案：$(\dfrac{4}{3}, 1)$

解析：重心 $G(\dfrac{3+2-1}{3},\dfrac{6+2-5}{3})=(\dfrac{4}{3}, 1)$

16. 平面上二直線 $L_1: y=-x+4$ ，$L_2: y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ ，$L_3: y=mx$ 不可圍成一個三角形，則 $m=$ ________

答案：$-1,\frac{1}{3},\frac{1}{2}$

解析：① $L_1 // L_3 \Rightarrow m=-1$

② $L_2 // L_3 \Rightarrow m=\frac{1}{2}$

③ L_1, L_2 與 L_3 交於一點 $\begin{cases} y=-x+4 \\ y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}x-\frac{9}{2}=0 \Rightarrow x=3, y=1$

$(3,1)$ 代入 $L_3: 1=3m \Rightarrow m=\frac{1}{3}$ 　　$\therefore m=-1,\frac{1}{3},\frac{1}{2}$

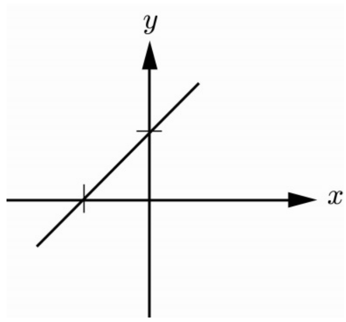
17. 直線 $(3+2k)x+(2-k)y+(-8-3k)=0$，不論 k 為任何實數，恆過一定點，則此定點為______.

答案：(2, 1)

解析：$(3+2k)x+(2-k)y+(-8-3k)=0 \Rightarrow (3x+2y-8)+k(2x-y-3)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+2y-8=0 \\ 2x-y-3=0 \end{cases} \Rightarrow (x, y)=(2,\ 1)$$

18. 若 $f(x)=3021x+1958$ ，則 $\frac{f(2093)-f(2063)}{30}=$ ________.



答案：3021

解析：即求斜率 $=3021$

19. 直線 $ax+by+c=0$ ，若 $ac>0, bc<0$ ，則 L 不過第________象限.

答案：四

解析：$y=0, x=-\frac{c}{a}<0$ 　　$x=0, y=-\frac{c}{b}>0 \Rightarrow$ 不過第四象限

20. 過二直線 $x+2y+3=0$ 與 $x-2y=0$ 之交點，且 y 截距為–2 之直線方程式為________.

答案：$5x+6y+12=0$

解析：設所求直線方程式為 $(x+2y+3)+k(x-2y)=0$

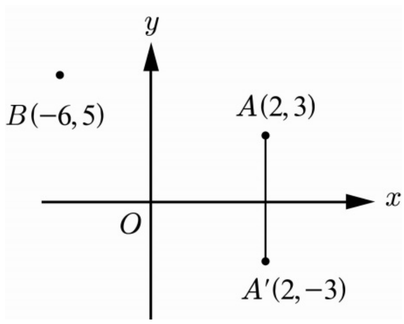
$\because$ 過 $(0,-2) \Rightarrow (-4+3)+k(0+4)=0 \Rightarrow k=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow (x+2y+3)+\frac{1}{4}(x-2y)=0 \Rightarrow 5x+6y+12=0$

21. 設 $A(2,3), B(-6,5)$ ，若 P 點在 x 軸上移動，且 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 之值最小，則 P 座標=________.

答案：$(-1,0)$

解析：



作 A 對 x 軸之對稱點 $A'(2,-3)$ ；

$m_{\overline{A'B}}=\frac{-8}{8}=-1 \Rightarrow \overleftrightarrow{A'B}: x+y=-1$

若 $y=0, x=-1$ 　　$\therefore P(-1,0)$

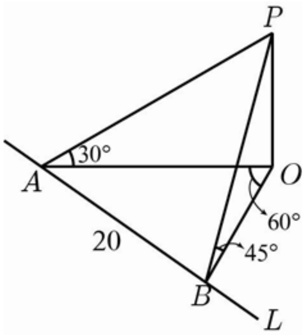
22. 設 $A(6,-3), B(-2,7)$ ，若 $P(x,y)$ 使得 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 之值最小，則 P 之座標=________.

答案：$(2,2)$

解析：$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=(x-6)^2+(y+3)^2+(x+2)^2+(y-7)^2 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{6-2}{2}=2 \\ y=\dfrac{-3+7}{2}=2 \end{cases}$ 時，有 $\min \Rightarrow P(2,2)$

23. 如圖，地面上有一旗桿 $\overline{OP}$ ，為了測量它的高度，我們在直線 L 上取了 A, B 兩點，且測得 $\overline{AB}=20$ 公尺，在 A 點測得 P 點的仰角 $\angle OAP=30°$，在 B 點測得 P 點的仰角 $\angle PBO=45°$，又測得 $\angle AOB=60°$，測得旗桿的高度為 $\dfrac{a}{\sqrt{b-\sqrt{3}}}$ 公尺，則數對 $(a, b)=$____.

答案：$(20, 4)$



解析：設 $\overline{OP}=h$

$\triangle OAP$ 中：$\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OP}}=\dfrac{1}{\tan 30°} \Rightarrow \overline{OA}=\sqrt{3}h$

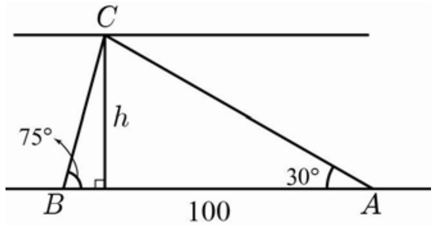
$\triangle OBP$ 中：$\overline{OP}=\overline{OB}=h$

$\triangle OAB$ 中：$\overline{AB}^2=(\sqrt{3}h)^2+h^2-2\sqrt{3}h\cdot h\cdot\cos 60°$

$\Rightarrow 400=4h^2-2\sqrt{3}h^2\cdot\dfrac{1}{2} \Rightarrow h^2=\dfrac{400}{4-\sqrt{3}} \Rightarrow h=\dfrac{20}{\sqrt{4-\sqrt{3}}}$

24. 為了測量河的寬度，在河岸邊選定 A, B 兩點，看到對岸的大樹 C，測得 $\angle CBA=75°$，$\angle CAB=30°$，$\overline{AB}=100$ 公尺，則河寬為__________公尺.

答案：50



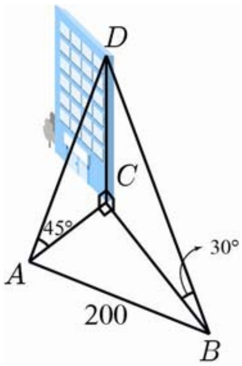
解析：

$\triangle ABC$ 中：$\angle C=180°-75°-30°=75°$

故 $\triangle ABC$ 為等腰三角形　$\therefore \overline{AC}=\overline{AB}=100$

又 $\dfrac{h}{\overline{AC}}=\sin 30° \Rightarrow h=100\times\dfrac{1}{2}=50$

25. 如圖，小明欲測量大廈的高度，他在 C 點的正西方 A 點處測得仰角為 $45°$，在 C 點的南方 B 點處測得仰角是 $30°$，且 $\overline{AB}=200$ m，試問大廈的高度為_________公尺.



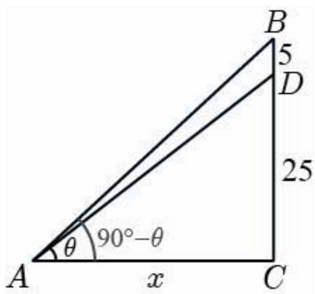
答案：100

解析：設 $\overline{CD}=x \Rightarrow \overline{AC}=x,\ \overline{CD}=\sqrt{3}x$

$\triangle ABC$ 中：$x^2+(\sqrt{3}x)^2=200^2 \Rightarrow 4x^2=200^2 \Rightarrow x=100$

26. 某工廠的一個煙囪高 25 公尺，其頂部裝有一支長 5 公尺的避雷針，在地面上 A 點測得煙囪頂及避雷針頂的仰角分別為 θ 與 $90°-\theta$，則 A 點到煙囪底部的距離為__________公尺.

答案：$5\sqrt{30}$



解析：

設 $\overline{AC}=x$

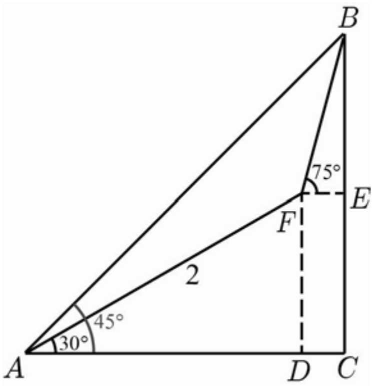
$\begin{cases} \dfrac{25}{x}=\tan\theta\ (\triangle ACD\text{中}) \\ \dfrac{30}{x}=\tan(90°-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}\ \ (\triangle ABC\text{中}) \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{25}{x}=\dfrac{x}{30} \Rightarrow x^2=25\times 30 \Rightarrow x=5\sqrt{30}$

27. 巧虎在山腳測得山頂的仰角是$45°$，沿傾斜$30°$的直路前進 2 公里後，又測得山頂的仰角是$75°$，若山路與山頂在同一個鉛直平面上，則山高為＿＿＿＿＿公里.

答案：2

解析：



$\triangle ADF$ 中：$\overline{CE}=\overline{DF}=2\times\sin 30°=1$

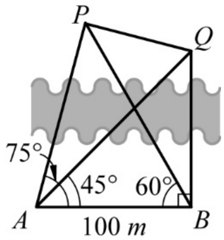
$\triangle ABF$ 中：$\angle BAF=45°-30°=15°$ ； $\angle ABF=45°-15°=30°$

$$\frac{\overline{BF}}{\sin 15°}=\frac{2}{\sin 30°}\Rightarrow \overline{BF}=\frac{2}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

$$\overline{BE}=\overline{BF}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=(\sqrt{6}-\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=1$$

$\therefore \overline{BC}=\overline{BE}+\overline{EC}=1+1=2$

28. 設一湖，欲測湖岸兩點 P、Q 的距離，已知湖岸築有鐵絲網不能靠近，今在鐵絲網外取得 A、B 兩點，得$\overline{AB}=100$公尺，如圖，測得$\angle PAB=75^{\circ}$，$\angle QAB=45^{\circ}$，$\angle PBA=60^{\circ}$，$\angle QBA=90^{\circ}$，則$\overline{AP}=$＿＿公尺；$\overline{PQ}=$＿＿公尺.



答案：$50\sqrt{6}$ ；$50\sqrt{2}$

解析：(1) $\triangle PAB$ 中，$\angle APB=180^{\circ}-(75^{\circ}+60^{\circ})=45^{\circ}$

由正弦定理：$\dfrac{\overline{AP}}{\sin 60^{\circ}}=\dfrac{100}{\sin 45^{\circ}}\Rightarrow \overline{AP}=50\sqrt{6}$

(2) $\triangle QAB$ 中，$\angle ABQ=90^{\circ}$ $\overline{AQ}=100\sqrt{2}$

$\angle PAQ=75^{\circ}-45^{\circ}=30^{\circ}$

由餘弦定理：$\overline{PQ}^2=(50\sqrt{6})^2+(100\sqrt{2})^2-2\cdot 50\sqrt{6}\cdot 100\sqrt{2}\cos 30^{\circ}=5000$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{5000}=50\sqrt{2}$