高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：102.09.30					
範圍	1-2 三角函數	班級	二年____班	姓名	
		座號			

1.設 2000°的最小正同界角為 α，最大負同界角為 β，則數對$(\alpha，\beta)=$____________ .

解答 (200°，－160°)

解析 $2000^\circ=360^\circ\times5+200^\circ\Rightarrow$ 最小正同界角 $=200^\circ$

$2000^\circ=360^\circ\times(-6)+(-160^\circ)\Rightarrow$ 最大負同界角 $=-160^\circ$.

2.坐標平面上，O 為原點，$P(x，3)$為角 θ 終邊上一點，$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$，

則： (1) x 之值為____________ . (2) $\sin\theta=$____________ .

解答 (1) $-\dfrac{9}{4}$;(2) $\dfrac{4}{5}$

解析 (1) $r=\sqrt{x^2+9}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}=-\dfrac{3}{5}$，$\therefore\ x<0$

$\Rightarrow\ \dfrac{x^2}{x^2+9}=\dfrac{9}{25}\ \Rightarrow\ 16x^2=81\ \Rightarrow\ x=\pm\dfrac{9}{4}$，$\because\ x<0$，$\therefore\ x=-\dfrac{9}{4}$.

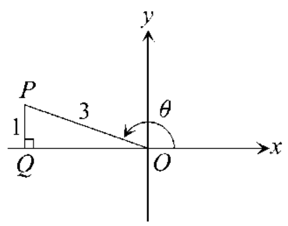
(2) $r=\sqrt{(-\dfrac{9}{4})^2+9}=\dfrac{15}{4}$，$\therefore\ \sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{3}{\frac{15}{4}}=\dfrac{4}{5}$.

3.設 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$，$90^\circ<\theta<180^\circ$，則：(1) $\cos\theta=$____________ . (2) $\tan(-540^\circ+\theta)=$____________ .

解答 (1) $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$;(2) $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

解析 (1)如圖，設 $\overline{PO}=3$，$\overline{PQ}=1$，則 $\overline{OQ}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$，第二象限$\therefore\ \cos\theta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(2) $\tan(-540^\circ+\theta)=\tan[90^\circ\times(-6)+\theta]=\tan\theta=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.



4.求值：$\cos20^\circ+\cos40^\circ+\cos60^\circ+\cdots+\cos160^\circ+\cos180^\circ=$____________ .

解答 -1

解析 原式 $=\cos20^\circ+\cos40^\circ+\cos60^\circ+\cos80^\circ+(-\cos80^\circ)+(-\cos60^\circ)+(-\cos40^\circ)$

$+(-\cos20^\circ)+(-1)=-1$.

5.已知 $\tan\theta<0<\sin\theta$，則 θ 為第____________象限角 .

解答 二

解析 $\because\ \tan\theta<0$，$\therefore\ \theta$ 在二、四象限；$\because\ \sin\theta>0$，$\therefore\ \theta$ 在一、二象限，

∵　$\tan\theta < 0 < \sin\theta$，∴　θ 在第二象限．

6.求下列各式的值：(1) $\sin(-1050°) =$ ____________．　(2) $\tan 6420° =$ ____________．

解答　(1) $\frac{1}{2}$;(2) $-\sqrt{3}$

解析　(1) $\sin(-1050°) = -\sin 1050° = -\sin(90° \times 11 + 60°) = -(-\cos 60°) = \frac{1}{2}$．

(2) $\tan 6420° = \tan(360° \times 17 + 300°) = \tan 300° = -\tan 60° = -\sqrt{3}$．

7.$\sin 47° \cos(-583°) + \sin(-583°) \sin 223° =$ ____________．

解答　-1

解析　原式 $= \sin 47° \cos 583° - \sin 583° \sin 223°$

$= \sin 47°(-\cos 43°) - \sin^2 43° = -\cos^2 43° - \sin^2 43° = -1$．

8.$x \in \mathbb{R}$，$\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$，則：　(1) $\cos x \cdot \sin x =$ ____________．　(2) $\sin x - \cos x =$ ____________．

解答　(1) $\frac{9}{32}$;(2) $\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

解析　$\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$ 平方

$\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = \frac{25}{16}$　$\Rightarrow$　$1 + 2\sin x\cos x = \frac{25}{16}$　$\Rightarrow$　$\sin x\cos x = \frac{9}{32}$，

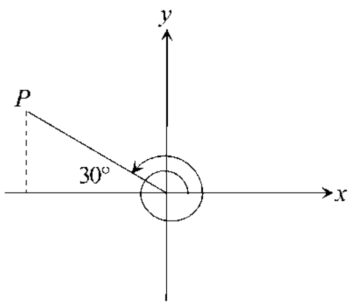
又 $(\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1 - 2 \times \frac{9}{32} = \frac{7}{16}$，

∵　$x \in \mathbb{R}$，∴　$\sin x - \cos x = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$．

9.在坐標平面上，始邊為正向 x 軸，設 P 點在有向角 510°的終邊上，且 P 點距離原點 1 單位，求 P 點坐標為__________．

解答　$(-\frac{\sqrt{3}}{2}，\frac{1}{2})$

解析



∵　$510° = 360° + 150°$，∴　P 點為第二象限角，且距離原點 1 單位，

∴　P 點坐標 $(-\cos 30°，\sin 30°) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}，\frac{1}{2})$．

10.若 $270° < \theta < 360°$ 且 $6\sin^2\theta - \sin\theta = 1$，則 $\tan\theta =$ ____________．

解答 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

解析 $6\sin^2\theta-\sin\theta-1=0 \Rightarrow (3\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)=0 \Rightarrow \sin\theta=-\frac{1}{3}$或$\frac{1}{2}$（不合）$\Rightarrow \tan\theta=-\frac{\sqrt{2}}{4}$．

11.設 θ 為一個第四象限角，$\tan\theta=-\frac{3}{4}$，求$\frac{1+\sin\theta}{1-\cos\theta}$ =＿＿＿＿＿＿＿．

解答 2

解析 θ 在第四象限，且 $\tan\theta=-\frac{3}{4} \Rightarrow \sin\theta=\frac{-3}{5}$，$\cos\theta=\frac{4}{5}$，$\frac{1+\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{1+(\frac{-3}{5})}{1-\frac{4}{5}}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}}=2$．

12.有向角 6789°的同界角 θ, 滿足 $0°\le\theta<360°$, 則：(1) $\theta=$＿＿＿. (2) 6789°角的終邊落在第＿＿＿象限．

解答 (1) 309°;(2)四

解析 (1)6789° = 360° × 18 + 309°，∴θ = 309°．

(2)∵270° < 309° < 360°，∴θ = 309°落在第四象限．

13.設 $90°<\theta<135°$，則 $\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}=$＿＿＿＿＿＿＿．

解答 $2\cos\theta$

解析 $90°<\theta<135°$，∴ $\cos\theta<\sin\theta$ 且 $\sin\theta+\cos\theta>0$，

原式$=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}-\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta+\cos\theta=2\cos\theta$．

14.設 $S=\{\theta_n\mid\theta_n=45°\times n,\ n\in\mathbb{Z},\ 1\le n\le100\}$，則 S 中有＿＿＿＿＿＿個角為第二象限角．

解答 13

解析 令 $90°+360°\times t<\theta_n=45°\times n<180°+360°\times t$，$t\in\mathbb{Z}$，∴ $2+8t<n<4+8t$，$t\in\mathbb{Z}$，

故 $n=8t+3$，$t\in\mathbb{Z}$，又 $1\le n=8t+3\le100 \Rightarrow -2\le8t\le97 \Rightarrow -\frac{1}{4}\le t\le\frac{97}{8}$，$t\in\mathbb{Z}$，

∴ $t=0, 1, 2, \cdots, 12$，共 13 個，∴ S 中有 13 個角為第二象限角．

15.$(\log_2\sin855°)^2+\log_3\tan(-510°)$之值為＿＿＿＿＿＿＿．

解答 $-\frac{1}{4}$

解析 $(\log_2\sin855°)^2+\log_3\tan(-510°)=(\log_2\sin135°)^2+\log_3\tan210°=(\log_2\sin45°)^2+\log_3\tan30°$

$$=(\log_2\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\log_3\frac{1}{\sqrt{3}}=(\log_2 2^{-\frac{1}{2}})^2+\log_3 3^{-\frac{1}{2}}$$

$$=(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\ .$$

16.設 $\sin^3\theta+\cos^3\theta=1$，則： (1) $\sin\theta+\cos\theta=$＿＿＿＿＿＿＿． (2) $\sin^4\theta+\cos^4\theta=$＿＿＿＿＿＿＿．

解答 (1)1;(2)1

解析 (1)設 $\sin\theta+\cos\theta=k \Rightarrow 1+2\sin\theta\cos\theta=k^2 \Rightarrow \sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{k^2-1}{2}$，

由 $\sin^3\theta+\cos^3\theta=1 \Rightarrow (\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)=1 \Rightarrow k(1-\frac{k^2-1}{2})=1$

$\Rightarrow\ k(3-k^2)=2\ \Rightarrow\ k^3-3k+2=0\ \Rightarrow\ (k-1)^2(k+2)=0$,

$\because\ k\neq -2$（否則 $\sin\theta=\cos\theta=-1$），$\therefore\ k=1$．

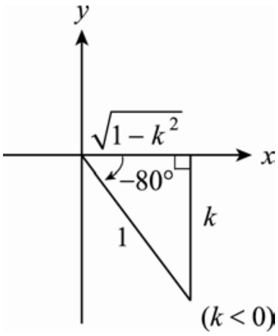
$$\begin{array}{ccccccc|l} 1 & + & 0 & - & 3 & + & 2 & 1 \\ & + & 1 & + & 1 & - & 2 & \\ \hline 1 & + & 1 & - & 2 & + & 0 & \end{array}$$

(2)又 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-2\cdot 0=1$．

17.設 $\sin(-80°)=k$,若以 k 表函數值,則: (1) $\tan(-80°)=$______. (2) $\cos280°=$______.

解答 (1) $\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$;(2) $\sqrt{1-k^2}$

解析 (1) $\tan(-80°)=\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$. (2) $\cos280°=\cos(360°-80°)=\cos(80°)=\cos(-80°)=\sqrt{1-k^2}$.



18.求下列各值：

(1) $\sin120°\cos150°-\cos225°\sin315°=$______ .

(2) $\sin1080°+\cos180°+\tan180°+\tan360°+\cos720°+\sin270°=$______ .

解答 (1) $-\dfrac{5}{4}$;(2) -1

解析 (1)原式 $=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times(-\dfrac{\sqrt{3}}{2})-(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})\times(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=-\dfrac{5}{4}$.

(2)原式 $=0+(-1)+0+0+1+(-1)=-1$.

19.設 $P(-4k,3k)$, $k\neq 0$ 為角 θ 終邊上之點,則:(1) $\tan\theta=$______. (2) $\dfrac{5\sin\theta+4\cos\theta}{2\sin\theta-\cos\theta}=$______.

解答 (1) $-\dfrac{3}{4}$;(2) $-\dfrac{1}{10}$

解析 (1) $\tan\theta=\dfrac{3k}{-4k}=-\dfrac{3}{4}$. (2) 原式 $\overset{\text{同除}\cos\theta}{=\!=\!=}\dfrac{5\tan\theta+4}{2\tan\theta-1}=\dfrac{5\cdot(-\frac{3}{4})+4}{2\cdot(-\frac{3}{4})-1}=-\dfrac{1}{10}$.

20.化簡求值:(1) $\dfrac{\sin(-\theta)}{\sin(180°+\theta)}-\dfrac{\tan(360°-\theta)}{\tan(180°+\theta)}+\dfrac{\sin(180°-\theta)}{\sin(360°-\theta)}=$__. (2) $\cos^2(55°+\theta)+\cos^2(35°-\theta)=$__.

解答 (1) 1;(2) 1

解析 (1) 原式 $=\dfrac{-\sin\theta}{-\sin\theta}-\dfrac{-\tan\theta}{\tan\theta}+\dfrac{\sin\theta}{-\sin\theta}=1+1-1=1$. (2) 原式 $=\sin^2(35°-\theta)+\cos^2(35°-\theta)$

$=1$.

21.設 $0° \le \theta \le 180°$，則 $y=\dfrac{5\cos\theta+7}{5\cos\theta-7}$之範圍為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答 $\{\,y\,|\,-6\le y\le -\dfrac{1}{6}\,\}$

解析 $y=\dfrac{5\cos\theta+7}{5\cos\theta-7}$ $\Rightarrow 5y\cos\theta-7y=5\cos\theta+7$ $\Rightarrow (5y-5)\cos\theta=7y+7$

$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{7y+7}{5y-5}$, $\because$ $0°\le\theta\le 180°$, $\therefore$ $|\cos\theta|\le 1$

$\Rightarrow \left|\dfrac{7y+7}{5y-5}\right|\le 1$ $\Rightarrow |7y+7|\le|5y-5|$ $\Rightarrow 49y^2+98y+49\le 25y^2-50y+25$

$\Rightarrow$ $6y^2+37y+6\le 0$ $\Rightarrow (6y+1)(y+6)\le 0$，$\therefore$ $-6\le y\le -\dfrac{1}{6}$ ．

22.角 θ 位於標準位置，若 $P(x，y)$為角 θ 終邊上一點，$\tan\theta=-3$，則 $\dfrac{2x^2-5xy-y^2}{x^2+xy+2y^2}=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答 $\dfrac{1}{2}$

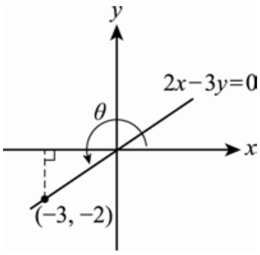
解析 $\because$ $\tan\theta=\dfrac{y}{x}=-3$，$\therefore$ $y=-3x\Rightarrow$ 求值式$=\dfrac{2x^2-5x\cdot(-3x)-(-3x)^2}{x^2+x\cdot(-3x)+2(-3x)^2}=\dfrac{8x^2}{16x^2}=\dfrac{1}{2}$ ．

24.設 θ 位於標準位置，其終邊在直線 $2x-3y=0$ 上，且 $\sin\theta\times\tan\theta<0$，則 $\sin\theta-\cos\theta=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答 $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$

解析 設 $P(x，y)\in L$：$2x-3y=0$，$\therefore$ $\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{2}{3}$，又 $\sin\theta\times\tan\theta<0$，$\therefore$ θ 為第三象限角

$\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{-2}{\sqrt{13}}$， $\cos\theta=\dfrac{-3}{\sqrt{13}}\Rightarrow\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$ ．

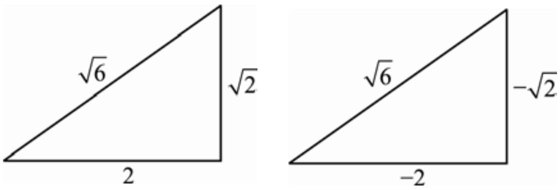


25.已知 $\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=3+2\sqrt{2}$，則 $\sin\theta=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答 $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

解析 原式 $\Rightarrow 1+\tan\theta=(3+2\sqrt{2})-(3+2\sqrt{2})\tan\theta$ $\Rightarrow$ $(4+2\sqrt{2})\tan\theta=2+2\sqrt{2}$

$\Rightarrow\tan\theta=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$，$\therefore$ θ 為第一或三象限角 $\Rightarrow\sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ．



26.若 θ 為第二象限角，則 $\dfrac{\theta}{3}$ 不可能在第____________象限．

解答　三

解析　$\because$ θ 為第二象限角，$\therefore$ $90° + n \times 360° < \theta < 180° + n \times 360°$，$n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 30° + n \times 120° < \dfrac{\theta}{3} < 60° + n \times 120°$，$n \in \mathbb{Z}$，

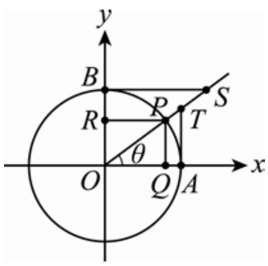
① $n = 3k$ 時 $\Rightarrow 30° + k \times 360° < \dfrac{\theta}{3} < 60° + k \times 360°$，$k \in \mathbb{Z}$，　$\therefore$ $\dfrac{\theta}{3}$ 為第一象限角；

② $n = 3k + 1$ 時 $\Rightarrow 150° + k \times 360° < \dfrac{\theta}{3} < 180° + k \times 360°$，$k \in \mathbb{Z}$，　$\therefore$ $\dfrac{\theta}{3}$ 為第二象限角；

③ $n = 3k + 2$ 時 $\Rightarrow 270° + k \times 360° < \dfrac{\theta}{3} < 300° + k \times 360°$，$k \in \mathbb{Z}$，　$\therefore$ $\dfrac{\theta}{3}$ 為第四象限角，

由①②③知：$\dfrac{\theta}{3}$ 不可能在第三象限角．

27.如圖為一單位圓，$\overline{AT}$，$\overline{BS}$ 為切線，$\overline{PQ} \perp x$ 軸，$\overline{PR} \perp y$ 軸，$\angle AOP$ 之度量為 θ，若 $\overline{AT} = \dfrac{3}{4}$，則四邊形 $OQPR$ 之周長=____________．



解答　$\dfrac{14}{5}$

解析　在△OAT 中，$\tan\theta = \dfrac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \dfrac{\frac{3}{4}}{1} = \dfrac{3}{4}$，$\therefore$ $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$，$\cos\theta = \dfrac{4}{5}$，

在△OQP 中，$\overline{PQ} = \overline{OP} \times \sin\theta = 1 \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5}$，$\overline{OQ} = \overline{OP} \times \cos\theta = 1 \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{4}{5}$，

$\therefore$ 四邊形 $OQPR$ 之周長 $= 2(\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}) = \dfrac{14}{5}$．

28.設兩坐標 $A(3\cos\theta, 2)$，$B(\cos\theta, \sin\theta)$，則線段 $\overline{AB}$ 長度之最大值為____________．

解答　$\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$

解析　$\overline{AB}^2 = (3\cos\theta - \cos\theta)^2 + (2 - \sin\theta)^2 = 4\cos^2\theta + 4 - 4\sin\theta + \sin^2\theta$

$= 4(1 - \sin^2\theta) + 4 - 4\sin\theta + \sin^2\theta = -3\sin^2\theta - 4\sin\theta + 8 = -3(\sin\theta + \dfrac{2}{3})^2 + \dfrac{28}{3}$，

取 $\sin\theta = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow \overline{AB}$ 的最大值 $= \sqrt{\dfrac{28}{3}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$．