高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：102.10.07					
範圍	1-2.3 解三角形	班級	二年____班	姓名	
		座號			

1. 判別下列各數之大小：$a=\sin 22°$，$b=\sin 177°$，$c=\sin 255°$，$d=\sin 314°$，$e=\sin(-156°)$。答：______。

答案：$a>b>e>d>c$

解析：$\sin 177°=\sin 3°$

$\sin 255°=\sin(180°+75°)=-\sin 75°$

$\sin 314°=\sin(360°-46°)=-\sin 46°$

$\sin(-156°)=-\sin 156°=-\sin(180°-24°)=\sin 24°$

$\therefore \sin 22°>\sin 177°>\sin(-156°)>\sin 314°>\sin 255°$

$\Rightarrow a>b>e>d>c$

2. 化簡 $\dfrac{\sin(90°+\theta)\cos(90°-\theta)}{\cos(180°+\theta)}+\dfrac{\sin(180°-\theta)\cos(90°+\theta)}{\sin(180°+\theta)}=$________。

答案：0

解析：原式 $=\dfrac{\cos\theta\cdot\sin\theta}{-\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta\cdot(-\sin\theta)}{-\sin\theta}=(-\sin\theta)+\sin\theta=0$

3. 有一正銳角 θ，它的一個同界角的度數恰為其 10 倍，則 $\theta=$______。(有二解)

答案：40°或 80°

解析：$10\theta-\theta=360°\times n$，$n\in N\Rightarrow\begin{cases}n=1, 9\theta=360°, \theta=40°\\ n=2, 9\theta=720°, \theta=80°\\ n=3, 9\theta=1080°, \theta=120°(\times)\end{cases}$

4. 將直角坐標$\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$化成極坐標＝______________。（輻角 θ 取為 $0°\le\theta<360°$）

答案：〔$\sqrt{2}$, 210°〕

解析：$r=\sqrt{\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$，$\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\begin{cases}\sqrt{2}\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\\ \sqrt{2}\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta=210°$ (第三象限 30°)， 極坐標〔$\sqrt{2}$, 210°〕

5. 設 $270°<\theta<360°$，且滿足 $\cos\theta=\cos(-702°)$，試求 $\theta=$______度。

答案：342

解析：$\cos(-702°)=\cos 702°=\cos(720°-18°)=\cos 18°=\cos(360°-18°)=\cos 342°$

6. $\sin 585°\cos 1125°+\cos(-300°)\sin(-330°)+\tan(-495°)=$______。

答案：$\frac{3}{4}$

解析：$\sin(90°\times6+45°)\cos(90°\times12+45°)-\cos(90°\times3+30°)\sin(90°\times3+60°)$
$-\tan(90°\times5+45°)$
$=(-\sin45°)\cos45°+\sin30°\cos60°+\cot45°$
$=(-\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$

7. 若 $270°<\theta<360°$，且 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，求 $\cos\theta=$______。

答案：$\frac{4}{5}$

解析：因 $270°<\theta<360°$，故 $\sin\theta<0$，$\cos\theta>0$

由 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，得 $\sin^2\theta=(\frac{1}{5}-\cos\theta)^2$

$\Rightarrow 1-\cos^2\theta=\frac{1}{25}-\frac{2}{5}\cos\theta+\cos^2\theta$

$\Rightarrow 25\cos^2\theta-5\cos\theta-12=0 \Rightarrow (5\cos\theta-4)(5\cos\theta+3)=0$

得 $\cos\theta=\frac{4}{5}$ 或 $-\frac{3}{5}$（不合）

8. 滿足 $\sin 4949°=\cos\theta$ 之最大負角 $\theta=$______。

答案：$-179°$

解析：$4949°=90°\times54+89°$

$\therefore \sin4949°=-\sin89°=-\cos1°=\cos(180°-1°)=\cos(1°-180°)=\cos(-179°)$

9. 已知正△ABC 中，$A(0,0)$，$B(3,1)$，若點 C 在第四象限，則 C 之坐標為______。

答案：$(\frac{3+\sqrt{3}}{2},\frac{1-3\sqrt{3}}{2})$

解析：《方法 1》

$\overline{AB}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$；設 $C(x,y)\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=(\sqrt{10})^2\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}\\(x-3)^2+(y-1)^2=(\sqrt{10})^2\cdots\text{②}\end{cases}$

① - ② $\Rightarrow 3x+y=5,\quad y=5-3x$ 代入①

$x^2+(5-3x)^2=10\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$（負不合）； $y=\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$

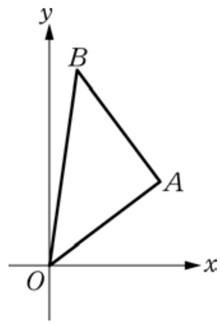
《方法 2》：(和角公式)

$B(3,1)=[\sqrt{10},\theta]$， $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}};\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$

則 $C(x,y)=C[\sqrt{10},\theta-60°]\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{10}\cos(\theta-60°)\\y=\sqrt{10}\sin(\theta-60°)\end{cases}$

$$\begin{cases} x=\sqrt{10}(\cos\theta\cos 60°+\sin\theta\sin 60°)=\sqrt{10}(\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{3+\sqrt{3}}{2} \\ y=\sqrt{10}(\sin\theta\cos 60°-\cos\theta\sin 60°)=\sqrt{10}(\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{1-3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

10. 如附圖坐標平面上，已知A (4 , 3)，$\overline{AB}$ ＝5，∠AOB＝45°，求B點的坐標為______。



答案：(1 , 7)

解析：《方法 1》

$\overline{OA}=\sqrt{4^2+3^2}=5;\ \overline{AB}=\sqrt{2}\overline{OA}=5\sqrt{2}$ ；設

$$B(x,y)\Rightarrow\begin{cases} x^2+y^2=(5\sqrt{2})^2\cdots\cdots\cdots\cdots① \\ (x-4)^2+(y-3)^2=5^2\cdots\cdots② \end{cases}$$

① - ② $\Rightarrow 4x+3y=25,\quad y=\frac{25-4x}{3}$ 代入①

$x^2+(\frac{25-4x}{3})^2=50\Rightarrow x^2-8x+7=0,\ x=1,7$（7 不合）； $y=7$

《方法 2》：(和角公式)

$A(4,3)=[5,\theta]$ ， $\cos\theta=\frac{4}{5};\ \sin\theta=\frac{3}{5}$

則 $C(x,\ y)=C[5\sqrt{2},\ \theta+45°]\Rightarrow\begin{cases} x=5\sqrt{2}\cos(\theta+45°) \\ y=5\sqrt{2}\sin(\theta+45°) \end{cases}$

$$\begin{cases} x=5\sqrt{2}(\cos\theta\cos 45°-\sin\theta\sin 45°)=5\sqrt{2}(\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}})=1 \\ y=5\sqrt{2}(\sin\theta\cos 45°+\cos\theta\sin 45°)=5\sqrt{2}(\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}})=7 \end{cases}$$

11. 若 sin (－130°)＝k，則 tan 680°＝______。(以 k 表示之)

答案：$\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$

解析： $\sin(-130°)=k\Rightarrow-\sin130°=k\Rightarrow-\sin(90°+40°)=k\Rightarrow\cos 40°=\frac{-k}{1}$

$\tan 680°=\tan(90°\times 7+50°)=-\cot 50°=-\frac{\sqrt{1+k^2}}{-k}=\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$

12. 若角θ的終邊在直線 $2x+y=0$ 上，求$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=$______。(有兩解)

答案：$\pm 2\sqrt{5}$

解析：$2x+y=0\Rightarrow y=-2x$；設 $x=t; y=-2t\Rightarrow r=\sqrt{5}|t|$

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{t}{\sqrt{5}|t|}}{1+\frac{-2t}{\sqrt{5}|t|}}+\frac{1+\frac{-2t}{\sqrt{5}|t|}}{\frac{t}{\sqrt{5}|t|}}=\frac{t}{\sqrt{5}|t|-2t}+\frac{\sqrt{5}|t|-2t}{t}=\begin{cases}2\sqrt{5}, t\ge 0\\ -2\sqrt{5}, t<0\end{cases}$$

13. 設 $180°<\theta<225°$，且 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$，求 $\sin\theta-\cos\theta=$_______。

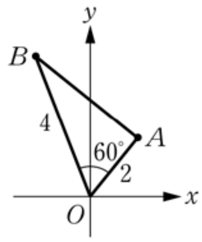
答案：$\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析：$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$；

又 $180°<\theta<225°\Rightarrow|\sin\theta|<|\cos\theta|,\ \sin\theta>\cos\theta\Rightarrow\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

14. 設 A、B 的極坐標分別為〔2 , 40°〕、〔4 , 100°〕，O 為極，求△AOB 面積＝______。

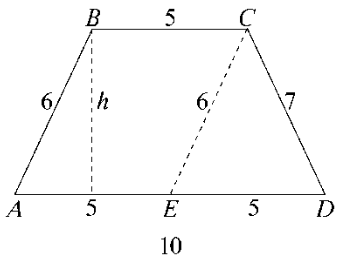
答案：$2\sqrt{3}$



解析：∵ $\angle AOB=100°-40°=60°$，$\triangle AOB$ **面積** $=\frac{1}{2}\times2\times4\times\sin60°=2\sqrt{3}$

15.梯形 $ABCD$ 上底 $\overline{BC}=5$，下底 $\overline{AD}=10$，兩腰 $\overline{AB}=6$，$\overline{CD}=7$，則：
(1)$\cos A=$__________． (2)而梯形 $ABCD$ 的面積為__________．

解答 (1)$\frac{1}{5}$;(2)$18\sqrt{6}$



解析 如圖：過 C 作 $\overline{AB}$ 之平行線交 $\overline{AD}$ 於 E，則

$\overline{CE}=6$，$\overline{DE}=10-5=5$，$\angle CED=\angle A$，

在 $\triangle CED$ 中，由餘弦定理，$\cos A=\cos\angle CED=\frac{25+36-49}{2\cdot5\cdot6}=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow$ 梯形 $ABCD$ 之高 $h=\overline{AB}\sin A=6\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=\frac{12\sqrt{6}}{5}$

$\Rightarrow$ 面積 $=\frac{1}{2}(5+10)\cdot h=\frac{15}{2}\cdot\frac{12\sqrt{6}}{5}=18\sqrt{6}$ ．

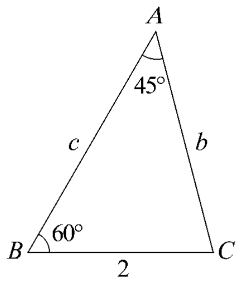
16.$\triangle ABC$ 中，$\angle A=45°$，$\angle B=60°$，$\overline{BC}=2$，則：(1) $\overline{AB}=$_________． (2) $\overline{AC}=$__________．

解答 (1)$\sqrt{3}+1$;(2)$\sqrt{6}$

解析 (1)$\angle C=180°-45°-60°=75°$，

由正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{2}{\sin45°}=\frac{c}{\sin75°}\Rightarrow c=\sqrt{3}+1$．

(2)由正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{2}{\sin45°}=\frac{b}{\sin60°}\Rightarrow b=\sqrt{6}$．



17.$\triangle ABC$ 中 , $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=7$, $\overline{CA}=5$, 則 : (1) $\angle A=$______. (2)設 M 為 $\overline{BC}$ 中點 , 則 $\overline{AM}=$________.

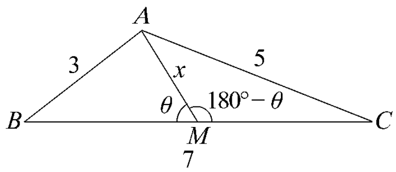
解答 (1)120°;(2)$\dfrac{\sqrt{19}}{2}$

解析 (1)由餘弦定理：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{5^2+3^2-7^2}{2\cdot5\cdot3}=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore\ \ \angle A=120°$.

(2)設 $\overline{AM}=x$，$\angle AMB=\theta$，則 $\angle AMC=180°-\theta$ ，

$\because\ \ \cos\theta=-\cos(180°-\theta)$，

$\therefore\ \ \dfrac{x^2+(\frac{7}{2})^2-3^2}{2\cdot x\cdot\frac{7}{2}}=-\dfrac{x^2+(\frac{7}{2})^2-5^2}{2\cdot x\cdot\frac{7}{2}}\Rightarrow\ \ 2x^2=\dfrac{19}{2}\ \ \Rightarrow\ \ x=\pm\dfrac{\sqrt{19}}{2}$（負不合）.



18.$\triangle ABC$ 中，$b=4$，$c=2$，$\tan B=\sqrt{15}$ ，則 $a=$______________ .

解答 4

解析 $\tan B=\sqrt{15}\ \ \Rightarrow\ \ \cos B=\dfrac{1}{4}$，$\therefore\ \ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$\Rightarrow\ \ 16=4+a^2-2\cdot2\cdot a\cdot\dfrac{1}{4}\ \ \Rightarrow\ \ a^2-a-12=0\ \ \Rightarrow\ \ a=4$.

19$\triangle ABC$ 中，$a=\sqrt{3}-1$，$c=\sqrt{3}+1$，$\angle A=15°$，則 $b=$______________ .

解答 $2\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{6}$

解析 $(\sqrt{3}-1)^2=(\sqrt{3}+1)^2+b^2-2b(\sqrt{3}+1)\cos15°$

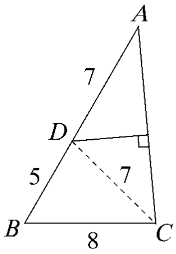
$\Rightarrow\ \ 4-2\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}+b^2-2b(\sqrt{3}+1)\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=4+2\sqrt{3}+b^2-\sqrt{2}(2+\sqrt{3})b$

$\Rightarrow\ \ b^2-(2\sqrt{2}+\sqrt{6})b+4\sqrt{3}=0\ \ \Rightarrow\ \ (b-2\sqrt{2})(b-\sqrt{6})=0\Rightarrow b=2\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{6}$.

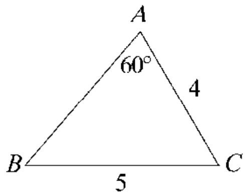
20.$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AC}$ 的中垂線交 $\overline{AB}$ 於 D，若 $\overline{AD}=7$，$\overline{BD}=5$，$\overline{BC}=8$，則 $\overline{AC}=$____________ .

解答 $4\sqrt{7}$

解析 $\cos B=\dfrac{25+64-49}{2\cdot 5\cdot 8}=\dfrac{1}{2}$，∴ $\overline{AC}^2=12^2+8^2-2\cdot 12\cdot 8\cdot \dfrac{1}{2}=112$ $\Rightarrow$ $\overline{AC}=4\sqrt{7}$.



21.$\triangle ABC$ 中，$\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=5$，$\angle A=60°$，則 $\overline{AB}$ 之長為____________ .



解答 $2+\sqrt{13}$

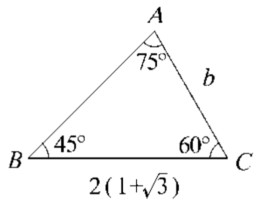
解析 由餘弦定理知，$\cos 60°=\dfrac{16+\overline{AB}^2-25}{2\cdot 4\cdot \overline{AB}}$ $\Rightarrow$ $4\overline{AB}=\overline{AB}^2-9$

$\Rightarrow$ $\overline{AB}^2-4\overline{AB}-9=0$ $\Rightarrow$ $\overline{AB}=\dfrac{4\pm\sqrt{16+36}}{2\cdot 1}=\dfrac{4\pm 2\sqrt{13}}{2}=2\pm\sqrt{13}$（負不合），

∴ $\overline{AB}=2+\sqrt{13}$.

22.$\angle B=45°$，$\angle C=60°$，$a=2(1+\sqrt{3})$，求$\triangle ABC$ 的面積____________ .

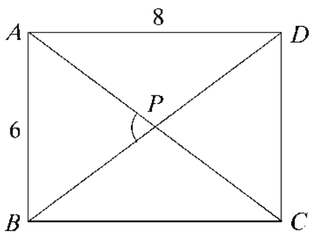
解答 $2(3+\sqrt{3})$



解析 由正弦定理知：$\dfrac{2(1+\sqrt{3})}{\sin 75°}=\dfrac{b}{\sin 45°}$ $\Rightarrow\dfrac{2(1+\sqrt{3})}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\Rightarrow b=4$，

∴ $\triangle ABC$ 之面積 $=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2(1+\sqrt{3})\times\sin 60°=2(3+\sqrt{3})$.

23.長方形 $ABCD$，令 $\overline{AB}=6$，$\overline{AD}=8$，對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 相交於 P 點，求 $\cos\angle APB=$____________.



解答 $\dfrac{7}{25}$

解析 $\overline{AB}=6$，$\overline{AD}=8$，$\overline{AC}=\overline{BD}=10$，

∴ $\overline{AP}=\overline{BP}=5$ $\Rightarrow$ $\cos\angle APB=\dfrac{5^2+5^2-6^2}{2\times 5\times 5}=\dfrac{14}{2\times 5\times 5}=\dfrac{7}{25}$.

24.a,b,c 為$\triangle ABC$ 三邊長，若 $2a-b-c=0$ 且 $a-4b+2c=0$，求 $\cos A:\cos B:\cos C=$__________.

解答 19：25：7

解析 $\begin{cases}2a-b-c=0\\ a-4b+2c=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $a:b:c=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -4 & 2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -4\end{vmatrix}$

$=(-6):(-5):(-7)=6:5:7$，

設 $a=6k$，$b=5k$，$c=7k$，

$\therefore\cos A:\cos B:\cos C=\dfrac{(5k)^2+(7k)^2-(6k)^2}{2(5k)(7k)}:\dfrac{(6k)^2+(7k)^2-(5k)^2}{2(6k)(7k)}:\dfrac{(6k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2(6k)(5k)}$

$=\dfrac{38}{5\times 7}:\dfrac{60}{6\times 7}:\dfrac{12}{6\times 5}=19:25:7$.

25.圓內接四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=4$，$\overline{CD}=6$，$\angle B=120°$，則：

(1) $\overline{AC}=$ ____________ . (2) $\overline{AD}=$ ___________ . (3)四邊形 $ABCD$ 的面積 $=$ ___________ .

解答 (1)10;(2)2 $\sqrt{19}$;(3)21 $\sqrt{3}$

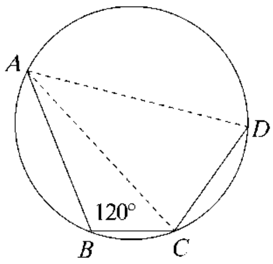
解析 (1)圓內接四邊形 $ABCD$，$\angle B=120°$ $\Rightarrow$ $\angle D=60°$，於 ΔABC 中，

利用餘弦定理，$\overline{AC}^2=6^2+4^2-2\cdot 6\cdot 4\cdot\cos 120°=76$ $\Rightarrow$ $\overline{AC}=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$.

(2)於 ΔADC 中，設 $\overline{AD}=d$，再次利用餘弦定理，

$\overline{AC}^2=6^2+d^2-2\cdot 6\cdot d\cdot\cos 60°$ $\Rightarrow$ $d^2-6d-40=0$ $\Rightarrow$ $d=10$.

(3)四邊形 $ABCD$ 之面積 $=\dfrac{1}{2}(6\cdot 4+6\cdot 10)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=21\sqrt{3}$.



26.設 ΔABC 之三邊長分別為 $\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AC}=7$，則：

(1) ΔABC 最小內角之餘弦的函數值為____________ .

(2) $\sin A$ ∶ $\sin B$ ∶ $\sin C=$ ____________ .

(3) ΔABC 的面積 $=$ ____________ .

(4) ΔABC 的外接圓半徑為____________ .

(5) ΔABC 的內切圓半徑為____________ .

(6) $\overline{BC}$ 邊上的中線長 $=$ ____________ .

(7)設 $\angle B$ 的內角平分線交 $\overline{AC}$ 邊於 D 點，則 $\overline{BD}$ 之長為____________ .

解答 (1) $\dfrac{11}{14}$;(2) 5∶7∶8;(3)10 $\sqrt{3}$;(4) $\dfrac{7}{3}$ $\sqrt{3}$;(5) $\sqrt{3}$;(6) $\dfrac{\sqrt{201}}{2}$;(7) $\dfrac{40}{13}$ $\sqrt{3}$

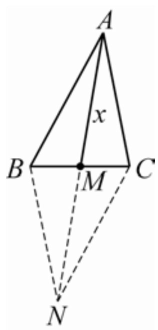
解析 (1) $\angle A$ 為最小內角，利用餘弦定理，$\cos A=\dfrac{7^2+8^2-5^2}{2\cdot 7\cdot 8}=\dfrac{11}{14}$.

(2)由正弦定理，$\sin A$ ∶ $\sin B$ ∶ $\sin C=5$ ∶ 7 ∶ 8 .

(3)利用海龍公式 $s=\dfrac{1}{2}(5+7+8)=10$，

$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)}=10\sqrt{3}$.

(4)由 $\Delta=\dfrac{abc}{4R}$ $\Rightarrow$ 外接圓半徑 $R=\dfrac{abc}{4\triangle}=\dfrac{5\times 7\times 8}{4\times 10\sqrt{3}}=\dfrac{7}{3}\sqrt{3}$.



(5)由 $\Delta=rs$ $\Rightarrow$ 內切圓半徑 $r=\dfrac{\triangle}{s}=\dfrac{10\sqrt{3}}{10}=\sqrt{3}$.

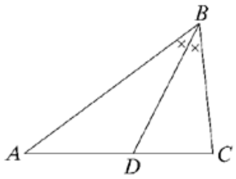
(6)延長 $\overline{AM}$ 使得 $\overline{MN}=\overline{AM}$，則 $ABDC$ 為一平行四邊形，

由平行四邊形定理 $(2x)^2+5^2=2(7^2+8^2)$，得中線長 $\overline{AM}=x=\dfrac{\sqrt{201}}{2}$.

(7) ∵ $\overline{BD}$ 為內角平分線，$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CB}}=\dfrac{8}{5}$ $\Rightarrow$ $\overline{AD}=\dfrac{8}{13}\overline{AC}=\dfrac{8}{13}\times 7=\dfrac{56}{13}$，

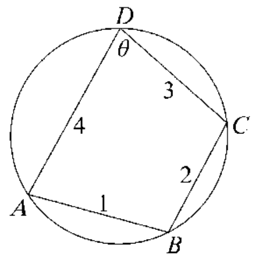
於$\triangle BAD$及$\triangle BAC$中，利用餘弦定理，

$$\cos A=\frac{8^2+(\frac{56}{13})^2-\overline{BD}^2}{2\cdot 8\cdot \frac{56}{13}}=\frac{8^2+7^2-5^2}{2\cdot 8\cdot 7}\quad\Rightarrow\quad \overline{BD}=\frac{40}{13}\sqrt{3}\ .$$



27.設四邊形 $ABCD$ 內接於一圓且 $\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3$，$\overline{DA}=4$，則：

(1) $\overline{AC}=$______ . (2)四邊形 $ABCD$ 的面積為______ .



解答 (1) $\sqrt{\frac{55}{7}}$;(2)$2\sqrt{6}$

解析 (1)如圖，設$\angle ADC=\theta$，則$\angle ABC=180°-\theta$，由餘弦定理知，

$\overline{AC}^2=9+16-2\cdot 3\cdot 4\cdot\cos\theta=25-24\cos\theta$……①,

$\overline{AC}^2=1+4-2\cdot 1\cdot 2\cdot\cos(180°-\theta)=5+4\cos\theta$……②,

消去 $\cos\theta$，①＋②×6，$7\overline{AC}^2=25+30=55\quad\Rightarrow\quad\overline{AC}=\sqrt{\frac{55}{7}}$.

(2)《方法 1》

由 $\overline{AC}^2=\frac{55}{7}$ 代入② $\Rightarrow\quad\cos\theta=\frac{5}{7}\quad\Rightarrow\quad\sin\theta=\frac{2\sqrt{6}}{7}$,

∴ 四邊形 $ABCD$ 之面積 $=\frac{1}{2}(1\cdot 2+3\cdot 4)\sin\theta=2\sqrt{6}$.

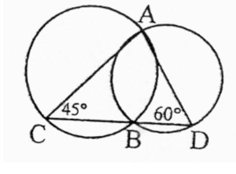
《方法 2》

利用公式：圓內接四邊形之邊長分別為 a，b，c，d，

則面積 $=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}=\sqrt{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=2\sqrt{6}$，其中，$s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$.

28.有大小兩圓相交於 A，B 兩點，如圖，過 B 有一線段 $\overline{CD}$ 交大圓於 C，交小圓於 D，且

$\angle ACD=45°$，$\angle ADC=60°$，則大圓與小圓的面積比＝______ .



解答 3：2

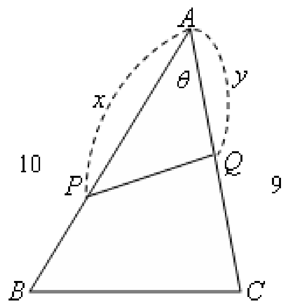
解析 $\frac{\overline{AB}}{\sin 45°}=2R\Rightarrow R=\frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}$，$\frac{\overline{AB}}{\sin 60°}=2r\Rightarrow r=\frac{\overline{AB}}{\sqrt{3}}$，

∴ 大圓面積：小圓面積$=\pi(\frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}})^2：\pi(\frac{\overline{AB}}{\sqrt{3}})^2=\frac{1}{2}：\frac{1}{3}=3：2$.

29.在$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=9$，$\cos\angle BAC=\frac{3}{8}$. 設點 P，Q 分別在邊 AB，AC 上使得$\triangle APQ$

之面積為$\triangle ABC$面積之一半，則$\overline{PQ}$之最小可能值為____________．（化成最簡分數）

解答 $\frac{15}{2}$



解析 令$\overline{AP}=x$，$\overline{AQ}=y$，$\angle BAC=\theta$，

$\because \triangle APQ$的面積$=\frac{1}{2}\triangle ABC$的面積

$\Rightarrow \frac{1}{2}xy\sin\theta=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 10\times 9\times\sin\theta$，$\therefore xy=45$，

又$\overline{PQ}=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}=\sqrt{x^2+y^2-2\times 45\times\frac{3}{8}}=\sqrt{x^2+y^2-\frac{135}{4}}$，

由算幾不等式：$\frac{x^2+y^2}{2}\geq\sqrt{x^2y^2}=xy=45$，$\therefore x^2+y^2\geq 90$

$\Rightarrow \overline{PQ}\geq\sqrt{90-\frac{135}{4}}=\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{15}{2}$，即$\overline{PQ}$的最小值為$\frac{15}{2}$．