高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：102.09.16					
範圍	1-1 三角函數	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 （每題 10 分 ）

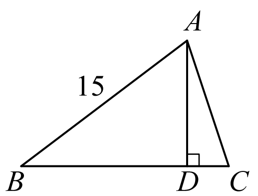
1.試完成下表：

三角函數 ＼ θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
30°			
45°			
60°			

解答

三角函數 ＼ θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

2.如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，已知 $\overline{AB}=15$，$\sin B=\frac{3}{5}$，$\cot C=\frac{1}{3}$，則 $\overline{BC}=$____________．



解答 15

解析 $\sin B=\frac{3}{5}\Rightarrow\overline{AB}=5k,\overline{AD}=3k,\overline{BD}=4k$，所以 $\overline{AD}=9$，$\overline{BD}=12$，

$\cot C=\frac{1}{3}\Rightarrow\overline{AD}=3s,\overline{CD}=s,\overline{AC}=\sqrt{10}s$，故 $\overline{CD}=3$

$\Rightarrow\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=12+3=15$ ．

3.求 $\tan^2 30^\circ+\sin 45^\circ\cdot\cos 45^\circ+\cos^2 60^\circ=$____________．

解答 $\frac{13}{12}$

解析 原式 $=(\frac{1}{\sqrt{3}})^2+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$ ．

4.求 $2\sin 30^\circ\cdot\cos 60^\circ+3\tan 60^\circ\cdot\tan 30^\circ-\sqrt{2}\sin 45^\circ=$____________．

解答 $\frac{5}{2}$

解析 原式$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5}{2}$.

5.設 $a=\cos30°+\sin30°$，$b=\cos30°-\sin30°$，求 $a^3-b^3=$____________ .

解答 $\frac{5}{2}$

解析 $a=\cos 30°+\sin 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad\Rightarrow\quad a-b=1$

$b=\cos 30°-\sin 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad\Rightarrow\quad a\cdot b=\frac{1}{2}$

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)=1^3+3\cdot\frac{1}{2}\cdot1=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$.

6.設 $\angle A=15°$，求 $\sin^2 2A+\cos^2 3A+\tan^2 4A=$____________ .

解答 $\frac{15}{4}$

解析 $\sin^2 2A+\cos^2 3A+\tan^2 4A=\sin^2 30°+\cos^2 45°+\tan^2 60°=(\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\sqrt{3})^2$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+3=\frac{15}{4}$.

7.設 A，B，C 均為銳角，若 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$， $\cos B=\frac{1}{2}$， $\tan C=\sqrt{3}$， 求 $\angle A+\angle B+\angle C=$____________ .

解答 165°

解析 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\angle A=45°$ ； $\cos B=\frac{1}{2}\Rightarrow\angle B=60°$； $\tan C=\sqrt{3}\Rightarrow\angle C=60°$

$\therefore\quad \angle A+\angle B+\angle C=45°+60°+60°=165°$.

8.$\log_2\sin30°+\log_3\tan30°=$____________ .

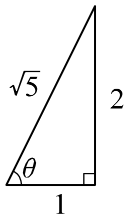
解答 $-\frac{3}{2}$

解析 $\log_2 \sin 30°+\log_3 \tan 30°=\log_2\frac{1}{2}+\log_3\frac{1}{\sqrt{3}}=-1+(-\frac{1}{2})=-\frac{3}{2}$.

9.設 θ 為一銳角且 $\tan\theta=2$，求 $\frac{2\sin\theta-\cos\theta}{2\sin\theta+\cos\theta}=$____________ .

解答 $\frac{3}{5}$

解析 $\because\quad \tan\theta=\frac{2}{1}\Rightarrow\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$， $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ ；原式$=\frac{\frac{4}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{3}{5}$.



10.設 θ 為銳角，已知 $\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=3+2\sqrt{2}$，求 $\sin\theta+\cos\theta=$ ____________ .

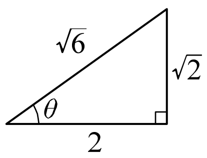
解答 $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$

解析 $\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=3+2\sqrt{2}$，設 $\tan\theta=t$

去分母 $\Rightarrow$ $1+t=3+2\sqrt{2}-(3+2\sqrt{2})t$ $\Rightarrow$ $(4+2\sqrt{2})t=2+2\sqrt{2}$

$\therefore$ $t=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=\dfrac{2(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$， $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$，即 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$.



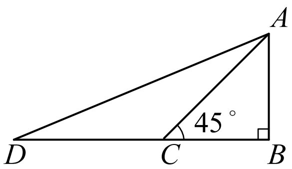
11.若 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，求 $\dfrac{\cos(90^\circ-\theta)}{\sin(90^\circ-\theta)}=$ ____________ .

解答 $\dfrac{3}{4}$

解析 原式 $=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=\dfrac{3}{4}$.

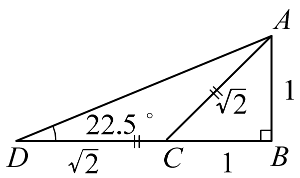
12.等腰直角△ABC 中，在直線 BC 上取一點 D 使 $\overline{CD}=\overline{CA}$，求

(1)$\sin22.5^\circ=$ ____________ . (2)$\cos22.5^\circ=$ ____________ . (3)$\tan22.5^\circ=$ ____________ .



解答 (1)$\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$;(2)$\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$;(3)$\sqrt{2}-1$

解析 如圖，△ACD 為等腰△



$\angle ADC=22.5^\circ$

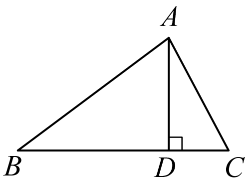
$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2=1+(1+\sqrt{2})^2=4+2\sqrt{2}$ $\quad\therefore\quad$ $\overline{AD}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

(1) $\sin 22.5°=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\times\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}=\sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{2}}{8}}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

(2) $\cos 22.5°=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}=\sqrt{\dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{4+2\sqrt{2}}}=\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}\times\dfrac{4-2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}}=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{2}}{8}}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

(3) $\tan 22.5°=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$.

12.如圖△ABC 中， $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ ， 已知 $\overline{AB}=25$ ， $\sin B=\dfrac{3}{5}$ ， $\sin C=\dfrac{15}{17}$ ， 求 $\overline{BC}=$____________ .



解答 28

解析 三角函數做法，△ABD 中， $\cos B=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}}$

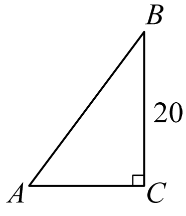
$\Rightarrow\quad \overline{BD}=\overline{AB}\times\cos B=25\times\dfrac{4}{5}=20\quad\Rightarrow\quad \overline{AD}=\overline{AB}\times\sin B=15=\overline{AC}\times\sin C\quad\therefore\quad \overline{AC}=17$

$\overline{DC}=\overline{AC}\cdot\cos C=8\qquad\therefore\quad \overline{BC}=\overline{BD}+\overline{DC}=20+8=28$.

13.直角△ABC 中， $\angle C=90°$，若 $\overline{BC}=20$ ， $\sin A=\dfrac{4}{5}$，則△ABC 的周長為____________ .

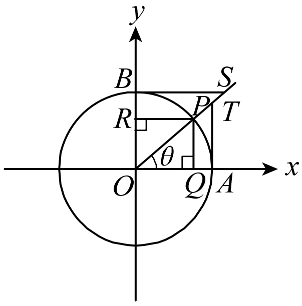
解答 60

解析 如圖， $\sin A=\dfrac{4}{5}\quad\Rightarrow\quad \overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=5:4:3$



設 $\overline{AB}=5t$ ， $\overline{BC}=4t$ ， $\overline{CA}=3t$ $\qquad \overline{BC}=20=4t\quad\Rightarrow\quad t=5$，所以周長 $=12t=60$.

14.下圖為單位圓， $\overline{AT}$ ， $\overline{BS}$ 均與圓相切， $\overline{PQ}$ 垂直 x 軸， $\overline{PR}$ 垂直 y 軸， $\angle AOP=\theta$ ，若 $\overline{BS}=\dfrac{4}{3}$，求矩形 $OQPR$ 的周長為____________ .



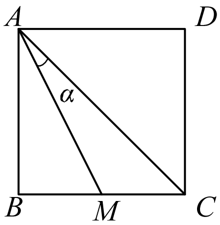
解答 $\frac{14}{5}$

解析 ΔOBS, $\cot\theta=\frac{\overline{BS}}{1}\Rightarrow\overline{BS}=\frac{4}{3}=\cot\theta,\tan\theta=\frac{3}{4}$, $\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$

ΔOQP, $\cos\theta=\frac{\overline{OQ}}{1}\Rightarrow\overline{OQ}=\overline{RP}=\cos\theta$，同理 $\overline{PQ}=\overline{OR}=\sin\theta$

∴ 矩形 $OQPR$ 周長 $=2(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{14}{5}$.

15.如圖，正方形 $ABCD$，M 為 $\overline{BC}$ 中點，$\angle MAC=\alpha$ ，求 $\tan\alpha=$ ____________ .



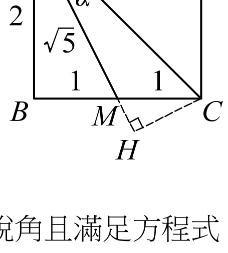
解答 $\frac{1}{3}$

解析 設 $\overline{AB}=\overline{BC}=2$，則 $\overline{BM}=\overline{CM}=1$ 延長 $\overline{AM}$

作 $\overline{CH}\perp\overleftrightarrow{AM}$ 於 H，$\triangle ABM\sim\triangle CHM$

$\frac{\overline{MH}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{AM}}\quad\Rightarrow\quad\overline{MH}=\frac{1}{\sqrt{5}}$；$\overline{CH}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\triangle ACH$ 中，$\tan\alpha=\frac{\overline{HC}}{\overline{AH}}=\frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{6}{\sqrt{5}}}=\frac{1}{3}$.



16.設 θ 為銳角且滿足方程式 $2\cos^2\theta+3\cos\theta=2$，求 $\sin\theta+\tan\frac{\theta}{4}=$ ____________ .

解答 $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$

解析 $\because\ 2\cos^2\theta+3\cos\theta-2=0$

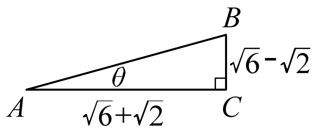
$\Rightarrow\ (2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)=0\ \Rightarrow\ \cos\theta=\frac{1}{2}$ 或 $\cos\theta=-2$（不合）$\therefore\ \theta=60^\circ$

故 $\sin\theta+\tan\frac{\theta}{4}=\sin 60^\circ+\tan 15^\circ=(\frac{\sqrt{3}}{2})+(2-\sqrt{3})=\frac{4-\sqrt{3}}{2}$.

17.設 $0^\circ<\theta<90^\circ$ 且 $\tan\theta=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$，則(1)$\sin\theta=$____________，(2)$\cos\theta=$____________ .

解答 (1)$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$;(2)$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

解析 由於 $\tan\theta=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$，作直角$\triangle ABC$，$\angle C=90^\circ$.



如圖，$\overline{AC}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$\overline{BC}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

故 $\overline{AB}=\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{16}=4$　因此(1)$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，(2)$\cos\theta=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

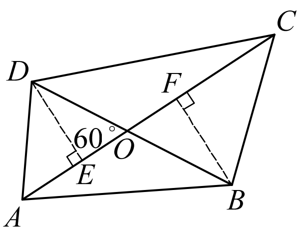
18.已知凸四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AC}=8$，$\overline{BD}=6$，$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 的一個夾角為 60°，求四邊形 $ABCD$ 的面積 $=$____________ .

解答 $12\sqrt{3}$

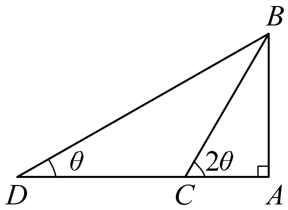
解析 四邊形 $ABCD$ 的面積 $=$ $\triangle ACD$ 面積 $+$ $\triangle ACB$ 面積

$=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{DE}+\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BF}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{OD}\times\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{OB}\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\sin 60^\circ\times(\overline{OD}+\overline{OB})=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\sin 60^\circ\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=12\sqrt{3}$.



19.如下圖，直角$\triangle ABC$，$\angle A=90^\circ$，若$\angle ADB=\theta$，$\overline{BC}=\overline{CD}$，且 $\tan\theta=\frac{1}{2}$，求 $\tan 2\theta=$____________ .



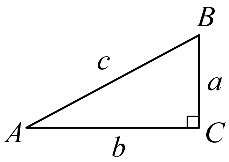
解答 $\frac{4}{3}$

解析 設 $\tan 2\theta=\frac{x}{1}$，則設 $\overline{AB}=x$，$\overline{CA}=1$ $\Rightarrow$ $\overline{BC}=\sqrt{1+x^2}$ $\therefore$ $\overline{CD}=\sqrt{1+x^2}$

因此 $\tan\theta=\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $2x-1=\sqrt{1+x^2}$ $\Rightarrow$ $(2x-1)^2=1+x^2$ $\Rightarrow$ $3x^2-4x=0$ $\Rightarrow$ $x=\frac{4}{3}$ 或 0（不合）.

20.直角△ABC 中，$\angle C$ 直角，$\angle A=\theta$，$\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，若滿足 $3a+3c=5b$，求 $\tan\theta=$__



解答 $\frac{8}{15}$

解析 $\begin{cases}3a+3c=5b\Rightarrow c=\frac{5b-3a}{3}\\ a^2+b^2=c^2\end{cases}$

代入 $a^2+b^2=c^2\Rightarrow a^2+b^2=(\frac{5b-3a}{3})^2\Rightarrow 16b^2-30ab=0\Rightarrow b(8b-15a)=0$

$\Rightarrow 8b-15a=0$，故 $\tan\theta=\frac{a}{b}=\frac{8}{15}$.

21.利用商數關係式與平方關係式，完成下列空格：

(1) $\frac{\sin 18°}{\cos 18°}=$ ①____________, $\tan 20°\cdot\cos 20°=$ ②____________ . (2) $\sin^2 43°+\cos^2 43°=$ ____________ .

解答 (1)①tan18°②sin20°;(2)1

解析 (1) $\frac{\sin 18°}{\cos 18°}=\tan 18°$，$\tan 20°\cdot\cos 20°=\sin 20°$. (2) $\sin^2 43°+\cos^2 43°=1$.

22.求 $(\sin 43°-\sin 47°)^2+(\cos 43°+\cos 47°)^2=$ ____________ .

解答 2

解析 原式 $=\sin^2 43°-2\sin 43°\cdot\sin 47°+\sin^2 47°+\cos^2 43°+2\cos 43°\cdot\cos 47°+\cos^2 47°$

$=(\sin^2 43°+\cos^2 43°)+(\sin^2 47°+\cos^2 47°)-2\sin 43°\cdot\sin 47°+2\sin 47°\cdot\sin 43°=2$.

23.求 $\cos^2 10°+\cos^2 20°+\cos^2 30°+\cos^2 40°+\cos^2 50°+\cos^2 60°+\cos^2 70°+\cos^2 80°=$ ____________ .

解答 4

解析 原式 $=\cos^2 10°+\cos^2 20°+\cos^2 30°+\cos^2 40°+\sin^2 40°+\sin^2 30°+\sin^2 20°+\sin^2 10°$

$=(\cos^2 10°+\sin^2 10°)+(\cos^2 20°+\sin^2 20°)+(\cos^2 30°+\sin^2 30°)+(\cos^2 40°+\sin^2 40°)$
$=1+1+1+1=4$．

24.已知 $\cos\theta=\tan\theta$，求 $\dfrac{1}{1-\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\sin\theta}=$＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答　$1+\sqrt{5}$

解析　$\cos\theta=\tan\theta$

$$\cos\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \cos^2\theta=\sin\theta \Rightarrow 1-\sin^2\theta=\sin\theta \Rightarrow \sin^2\theta+\sin\theta-1=0$$

$$\Rightarrow \sin\theta=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$（取正）

$$\frac{1}{1-\sin\theta}+\frac{1}{1+\sin\theta}=\frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{2}{\cos^2\theta}=\frac{2}{\sin\theta}=\frac{2}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{4}{-1+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{4}{-1+\sqrt{5}}\times\frac{-1-\sqrt{5}}{-1-\sqrt{5}}=\frac{4(-1-\sqrt{5})}{1-5}=1+\sqrt{5}$$．

25.設 θ 為銳角，若 $\sin^2\theta+1=3\sin\theta\cdot\cos\theta$，求 $\tan\theta=$＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答　$\dfrac{1}{2}$ 或 1

解析　$\sin^2\theta+1=3\sin\theta\cdot\cos\theta \Rightarrow \sin^2\theta+(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-3\sin\theta\cdot\cos\theta=0$

$\Rightarrow 2\sin^2\theta-3\sin\theta\cdot\cos\theta+\cos^2\theta=0$

$\Rightarrow (2\sin\theta-\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=0$

$\Rightarrow 2\sin\theta=\cos\theta$ 或 $\sin\theta=\cos\theta$

$\Rightarrow \tan\theta=\dfrac{1}{2}$ 或 1．

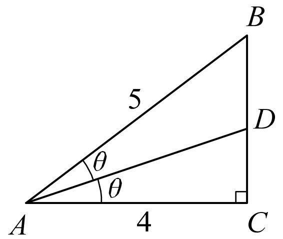
26.直角△ABC 中，$\angle C=90°$，若 $\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=4$，$\angle A$ 的平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，$\angle DAB=\theta$，求 $\tan\theta=$
＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答　$\dfrac{1}{3}$

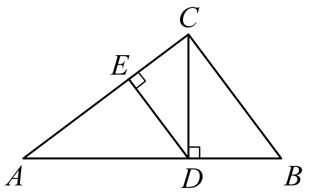
解析　$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=4 \Rightarrow \overline{BC}=3$

由分角線性質 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{5}{4}$　　∴ $\overline{BD}=\dfrac{5}{3}$，$\overline{CD}=\dfrac{4}{3}$

△ACD 中，$\tan\theta=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\frac{4}{3}}{4}=\dfrac{1}{3}$．



27.直角$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=3$，自 C 作$\overline{CD}$垂直$\overline{AB}$於 D，作$\overline{DE}$垂直$\overline{AC}$於 E，求$\overline{DE}=$ ______ .



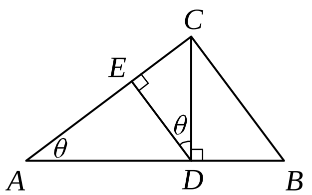
解答 $\dfrac{48}{25}$

解析 令$\angle A=\theta$，則$\angle CDE=\theta$

$\triangle ABC$ 中，$\sin\theta=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{3}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{4}{5}$

$\triangle ACD$ 中，$\sin\theta=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{CD}=\overline{AC}\times\sin\theta=4\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{12}{5}$

$\triangle CDE$ 中，$\cos\theta=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{CD}} \Rightarrow \overline{DE}=\overline{CD}\times\cos\theta=\dfrac{12}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{48}{25}$.



28.矩形 $ABCD$，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=6$，在$\overline{BC}$上取一點 P，使$\angle APD=90°$，令$\angle BAP=\theta$，求 $\tan\theta=$ ______ .

解答 $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

解析 $\triangle ABP$ 中，$\tan\theta=\dfrac{x}{2} \Rightarrow x=2\tan\theta$

$\triangle PDC$ 中，$\tan\theta=\dfrac{2}{6-x}=\dfrac{2}{6-2\tan\theta}$

$\therefore\ 6\tan\theta-2\tan^2\theta=2 \Rightarrow \tan^2\theta-3\tan\theta+1=0 \Rightarrow \tan\theta=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.