第 2 章　多項式函數

2-1　簡單多項式函數及其圖形

基礎題

1.試畫出下列各函數圖形：

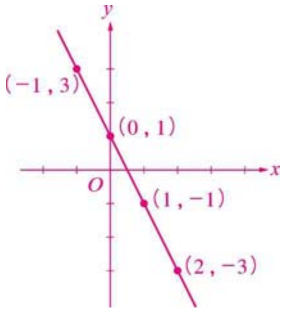
(1) $f(x)=-2x+1$。

(2) $g(x)=x^2+4x+3$。

(3) $h(x)=-x^3$。

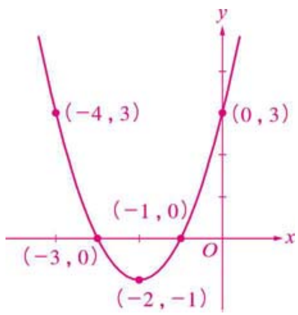
解　(1)直接描點

x	-1	0	1	2
$f(x)$	3	1	-1	-3



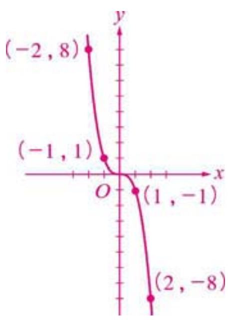
(2)配方：$x^2+4x+3=(x+2)^2-1$，圖形開口向上，頂點為 $(-2,-1)$，再描點

x	-4	-3	-2	-1	0
$g(x)$	3	0	-1	0	3



(3)直接描點

x	-2	-1	0	1	2
$h(x)$	8	1	0	-1	-8



2.設 $f(x)$ 為一次函數，若 x 值每增加 2 時，其對應之 y 值增加 3，且 $f(0)=-5$，求 $f(x)$。

解　假設 $f(x)=ax+b$，因為 $f(0)=-5 \Rightarrow b=-5$

x 值每增加 2 時，其對應之 y 值增加 3，

所以 $f(2)=f(0)+3=-2 \Rightarrow 2a+b=-2$，解得 $a=\frac{3}{2}$　因此，$f(x)=\frac{3}{2}x-5$

3.假設地面溫度為 20°C，上空 x 公里處的大氣溫度是 y°C，那麼 y 可以表示 x 的函數為 $y=f(x)$。$y=f(x)$ 的關係式為 $f(x)=\begin{cases}20-6x, & 0\leq x\leq 11\\ -46, & x\geq 11\end{cases}$。

試問：(1)從地面向上升高，在 5 公里處及 12 公里處的大氣溫度。

(2)在地面上方 10 公里以下的高度，每升高 1 公里，氣溫降低多少溫度？

解　(1) $f(5)=20-6\cdot 5=-10$

$f(12)=-46$

故在 5 公里處及 12 公里處的大氣溫度分別為 −10°C 及 −46°C

(2) $0\leq x\leq 10 \Rightarrow 1\leq x+1\leq 11$，故 $f(x)=20-6x$，$f(x+1)=20-6(x+1)$

所以 $f(x+1)-f(x)=(20-6(x+1))-(20-6x)=-6$

故每升高 1 公里，氣溫降低 6°C

4.已知 $y=f(x)$ 為二次函數，

(1)若其圖形以 $(2,3)$ 為頂點，且過點 $(3,1)$，求 $f(x)$。

(2)若其圖形與 x 軸交於 $(-1,0)$，$(3,0)$，且其頂點的 y 坐標為 4，求 $f(x)$。

解　(1)因為 $f(x)$ 為以 $(2,3)$ 為頂點的二次函數，可設 $f(x)=a(x-2)^2+3$

代入點 $(3,1)$，$f(3)=a(3-2)^2+3=1 \Rightarrow a=-2$

故 $f(x)=-2(x-2)^2+3=-2x^2+8x-5$

(2)圖形與 x 軸交於 $(-1,0)$，$(3,0)$，可設 $f(x)=a(x+1)(x-3)$

配方 $f(x)=a(x+1)(x-3)=a(x^2-2x-3)=a(x-1)^2-4a$

頂點的 y 坐標為 4，故 $4=-4a \Rightarrow a=-1$

故 $f(x)=(-1)\cdot(x^2-2x-3)=-x^2+2x+3$

5.將 $y=x^2+3x$ 的圖形沿 x 軸向右平移 2 單位，沿 y 軸向下平移 5 單位得到函數 $y=f(x)$ 的圖形，求 $f(x)$。

解　$y=x^2+3x \xrightarrow{\text{向右平移2單位}} y=(x-2)^2+3(x-2)$

$\xrightarrow{\text{向下平移5單位}} y=(x-2)^2+3(x-2)-5$

整理得 $y=x^2-x-7$

即 $f(x)=x^2-x-7$

進階題

6.設 $f(x)=x^2-2x-1$，

(1)若 $x\in\mathbb{R}$，求 $f(x)$ 的最小值。

(2)若 $-2\leq x\leq 2$，求 $f(x)$ 的最大值與最小值。

(3)若 $2\leq x\leq 3$，求 $f(x)$ 的最大值與最小值。

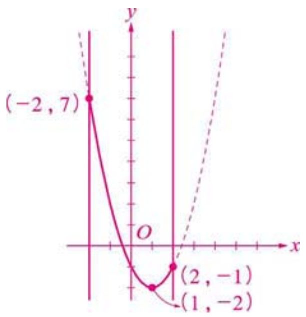
(4)若 $-2\leq x\leq 0$，求 $f(x)$ 的最大值與最小值。

解　(1)配方 $x^2-2x-1=(x-1)^2-2$，故 $f(x)$ 的最小值為 -2

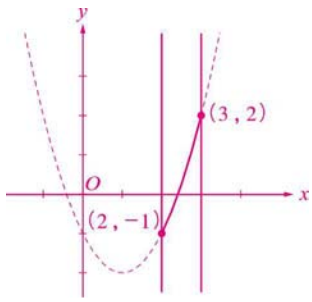
(2)由圖 1 可知　若 $-2\leq x\leq 2$，則 $f(x)$ 的最大值為 7，最小值為 -2

(3)由圖 2 可知，若 $2\leq x\leq 3$，則 $f(x)$ 的最大值為 2，最小值為 -1

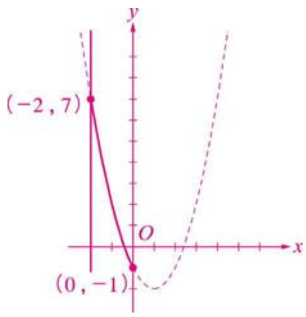
(4)由圖 3 可知，若 $-2\leq x\leq 0$，則 $f(x)$ 的最大值為 7，最小值為 -1



圖(一)



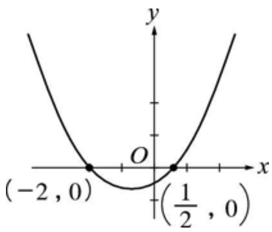
圖(二)



圖(三)

7.若函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的點形如下圖，則下列各數哪些為負數？

(A)a　(B)b　(C)c　(D)b^2-4ac　(E)$a-b+c$



解　(A)×：圖形開口向上，故 $a>0$

(B)×：頂點在 y 軸左側，故 $\dfrac{-b}{2a}<0 \Rightarrow \dfrac{b}{2a}>0 \Rightarrow b>0\ (a>0)$

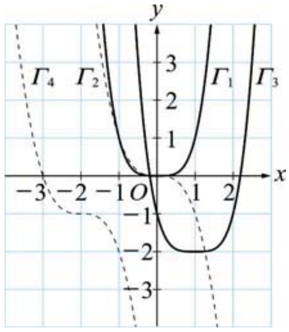
(C)○：圖形與 y 軸的交點坐標為 $f(0)=c$，$c<0$

(D)×：圖形與 y 軸有兩個交點，故判別式 $b^2-4ac>0$

(E)○：圖形與直線 $x=-1$ 的交點坐標為 $(-1, f(-1))$

又 $f(-1)=a-b+c$，由圖形知 $f(-1)<0$　故選(C)(E)

8.下圖為四個函數 $y=-x^3$，$y=-(x+2)^3-1$，$y=x^4$，$y=(x-1)^4-2$ 的圖形。試選出 Γ_1，Γ_2，Γ_3 及 Γ_4 對應的函數。



解　Γ_2，Γ_4 為三次函數的圖形；Γ_1，Γ_3 為四次函數的圖形

Γ_1 及 Γ_2 通過原點

故 Γ_1 為 $y=x^4$ 的圖形

Γ_2 為 $y=-x^3$ 的圖形

Γ_3 為 $y=(x-1)^4-2$ 的圖形

Γ_4 為 $y=-(x+2)^3-1$ 的圖形

9.已知 $y=x^4$ 的圖形對稱於 y 軸，試問 $y=(x+1)^4-2$ 的圖形對稱於哪一直線？

解　$y=x^4 \xrightarrow{\text{向左平移1單位}} y=(x+1)^4 \xrightarrow{\text{向下平移2單位}} y=(x+2)^4-2$

$x=0$（y 軸）向左平移 1 單位再向下平移 2 單位為 $x+1=0$

因此，$y=(x+2)-2$ 對稱於直線 $x+1=0$

10.若拋物線 $y=2x^2-12x+18+5a$ 與 $y=-5x^2+10bx+8-5b^2$ 有相同的頂點，求此頂點坐標。

解　配方：$2x^2-12x+18+5a=2(x-3)^2+5a$，頂點為 $(3,5a)$

$-5x^2+10bx+8-5b^2=-5(x-b)^2+8$，頂點為 $(b,8)$

因此，$5a=8$，$b=3$，故此頂點坐標為 $(3,8)$

11.某製造玩具工廠，每次接到訂單都需開模 5 萬元，製造每一千個玩具材料費需 2 萬元，由此建立生產的基本成本函數 $f(x)=5+2x$，其中 x 以千個為單位。依過去經驗，接到訂單數量與報價總值有如下關係：

數量（千個）	報價總值（萬元）
5	37.5
10	70
15	97.5

以此資料建立一個二次函數的報價總值函數 $g(x)$，及獲利函數

$h(x)=g(x)-f(x)$。

(1)若接到訂單為 20 千個，試問交貨時，每千個玩具的基本成本平均是多少？

(2)試求報價總值函數 $g(x)$。

(3)根據 $h(x)$，試問訂單數量是多少時，獲利總值最高？

解　(1)$f(20)=5+2\times20=45$，故每千個玩具的基本成本平均是$\frac{45}{20}=\frac{9}{4}$萬元

(2)假設 $g(x)=ax^2+bx+c$，故 $g(5)=37.5$，$g(10)=70$，$g(15)=97.5$

$25a+5b+c=37.5$，$100a+10b+c=70$，$225a+15b+c=97.5$，

相鄰兩式相減，得 $75a+5b=32.5$，$125a+5b=27.5$，再解得

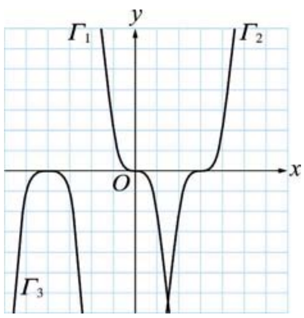
$50a=-5$⇨$a=-\frac{1}{10}$，$b=8$，代回 $25a+5b+c=37.5$，得 $c=0$

所以，$g(x)=-\frac{1}{10}x^2+8x$

(3)$h(x)=-\frac{1}{10}x^2+8x-(5+2x)=-\frac{1}{10}x^2+6x-5=-\frac{1}{10}(x-30)^2+85$

故訂單數量是 30 千個時，獲利總值最高為 85 萬元

12.下圖為下列三個函數的圖形 $y=a_1x^3$，$y=a_2(x-3)^3$，$y=a_3(x-h)^4$。試選出正確的選項。



(A)Γ_1 為 $y=a_1x^3$ 的圖形　(B)$a_1>0$　(C)$a_2>0$　(D)$a_3>0$　(E)$h>0$

解　Γ_1 為 $y=a_1x^3$ 的圖形，$a_1<0$（考慮 Γ_1 上的點 $(1, a_1)$）

Γ_2 為 $y=ax^3$，$a>0$ 圖形的平移，因此 $a_2>0$（也可以考慮 Γ_2 上一點 $(4, a_2)$，得 $a_2>0$）

Γ_3 為 $y=bx^4$，$b<0$ 圖形的向左平移

即形如 $y=b(x+t)^4$，$b<0$，$t>0$

因此 $a_3=b<0$，$h=-t<0$ 故選(A)(C)

2-2　多項式的運算與應用

基礎題

1.設 $f(x)=ax^6-bx^4+3x-\sqrt{2}$，其中 a，b 為非零實數，求 $f(5)-f(-5)$ 之值。

〔96.學測改〕

解　$f(5)-f(-5)=(a\cdot 5^6-b\cdot 5^4+3\cdot 5-\sqrt{2})-(a(-5)^6-b(-5)^4+3(-5)-\sqrt{2})$

$=a(5^6-(-5)^6)-b(5^4-(-5)^4)+3(5-(-5))-\sqrt{2}+\sqrt{2}$

$=3\cdot 10=30$

2.設 $f(x)=8x^4+6x^2+6x-2$，試求：

(1)以 $x+1$ 除 $f(x)$ 之商式及餘式。

(2)以 $2x+1$ 除 $f(x)$ 之商式及餘式。

解　利用綜合除法，

(1)

$$\begin{array}{rrrrr|r|l} 8 & +0 & +6 & +6 & -2 & & -1 \\ & -8 & +8 & -14 & +8 & & \\ \hline 8 & -8 & +14 & -8 & +6 & & \end{array}$$

故商式為 $8x^3-8x^2+14x-8$，　餘式為 6

(2)

$$\begin{array}{rrrrr|l} 8 & +0 & +6 & +6 & -2 & -\frac{1}{2} \\ & -4 & +2 & -4 & -1 & \\ \hline 2)\ 8 & -4 & +8 & +2 & -3 & \\ 4 & -2 & +4 & +1 & & \end{array}$$

故商式為 $4x^3-2x^2+4x+1$，　餘式為 -3

3.試求 $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)\cdots\cdots(x+10)$ 展開式中，試求：

(1)x^{10} 項的係數。(2)x^9 項的係數。

解　(1) $(x+1)(x+2)(x+3)\cdots\cdots(x+10)$

$x\cdot x\cdot x\cdot\cdots\cdots\cdot x=x^{10}$，$x^{10}$ 項的係數為 1

(2) $(x+1)(x+2)\cdots(x+10)$

$1\cdot x\cdot\cdots\cdots\cdot x=x^9$

$x\cdot 2\cdot x\cdot\cdots\cdots\cdot x=2x^9$

$\cdots\cdots$

$x\cdot\cdots\cdots\cdot x\cdot 10=10x^9$

故 x^9 項的係數為 $1+2+3+\cdots\cdots+10=55$

4.若多項式 $f(x)$，$g(x)$ 滿足 $f(x)-g(x)=x^3-5x^2+x+1$，且 $x-1$ 為 $g(x)$ 的因式，則 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為何？

解　$f(x)=g(x)+(x^3-5x^2+x+1)$

$f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 $f(1)$

$f(1)=g(1)+(1-5+1+1)=0+(-2)=-2$

（因 $(x-1)$ 整除 $g(x)$，故 $g(1)=0$）

故 $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式為 -2

5.若多項式 x^3+4x^2+5x-3 除以 $f(x)$ 的商式為 $x+2$，餘式為 $2x-1$，求 $f(x)$。

解　依題意，

$x^3+4x^2+5x-3=f(x)\cdot(x+2)+(2x-1)$

所以 $x^3+4x^2+3x-2=f(x)\cdot(x+2)$

因此 $f(x)$ 為 x^3+4x^2+3x-2 除以 $x+2$ 的商式

$$\begin{array}{rrrr|l} 1+4+3 & -2 & & & -2 \\ -2-4 & +2 & & & \\ \hline 1+2-1 & \boxed{+0} & & & \end{array}$$

故 $f(x)=x^2+2x-1$

6.若多項式 x^2+x+2 能整除 $x^5+x^4+x^3+px^2+2x+q$，求數對 (p,q)。〔94.學測〕

解　由分離係數法

$$\begin{array}{r|l} & 1+0-1+(p+1) \\ \hline 1+1+2) & 1+1+1+\quad p\quad+\quad 2\quad+\quad q \\ & 1+1+2 \\ \hline & \quad -1+\quad p\quad+\quad 2 \\ & \quad -1-\quad 1\quad-\quad 2 \\ \hline & \qquad (p+1)+\quad 4\quad+\quad q \\ & \qquad (p+1)+(p+1)+\ 2(p+1) \\ \hline & \qquad\qquad (4-(p+1))+(q-2(p+1)) \end{array}$$

故 $\begin{cases} 4-(p+1)=0 \\ q-2(p+1)=0 \end{cases}$　得 $p=3$，$q=8$，即數對 $(p,q)=(3,8)$

7.若 x^4-3ax^2+bx+4 有因式 $(x+1)$ 及 $(x-2)$，求數對 (a,b)。

解　由因式定理 $(-1)^4-3a(-1)^2+b(-1)+4=0 \Rightarrow 3a+b=5$……………①

$2^4-3a\cdot(2)^2+b\cdot 2+4=0 \Rightarrow 6a-b=10$……………②

①＋②得 $9a=15 \Rightarrow a=\dfrac{5}{3}$　代入①得 $b=0$

即數對 $(a,b)=\left(\dfrac{5}{3},0\right)$

8.設 $f(x)=2x^3-4x^2-x+1$，

(1) $f(x)=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)+d(x-1)(x-2)(x-3)$，求 $a+b+c+d$。

(2)若 $f(x)=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$，求 $a+b+c+d$。

(3)求 $f(1.99)$ 至小數點以下第三位。

(4)求 $f(2+\sqrt{5})$。

解　(1) $f(1)=2-4-1+1=-2=a+b\cdot 0+c\cdot 0+d\cdot 0$ 得 $a=-2$

$f(2)=2\cdot 8-4\cdot 4-2+1=-1=a+b(2-1)+c\cdot 0+d\cdot 0$ 得 $b=1$

$f(3)=2\cdot 27-4\cdot 9-3+1=16=a+b(3-1)+c(3-1)(3-2)+d\cdot 0$ 得 $c=8$

比較 x^3 項係數即可知 $d=2$　故 $a+b+c+d=-2+1+8+2=9$

(2)

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & -4 & -1 & +1 & 2 \\
 & +4 & +0 & -2 & \\
\hline
2 & +0 & -1 & \boxed{-1} & \\
 & +4 & +8 & & \\
\hline
2 & +4 & \boxed{+7} & & \\
 & +4 & & & \\
\hline
2 & \boxed{+8} & & &
\end{array}
$$

$f(x)=2(x-2)^3+8(x-2)^2+7(x-2)-1$

故 $a+b+c+d=2+8+7-1=16$

(3) $f(1.99)=2(1.99-2)^3+8(1.99-2)^2+7(1.99-2)-1$

$=2(-0.01)^3+8(-0.01)^2+7(-0.01)-1$

$\approx -1.07+0.0008=-1.0692\approx -1.069$

(4) $f(2+\sqrt{5})=2(2+\sqrt{5}-2)^3+8(2+\sqrt{5}-2)^2+7(2+\sqrt{5}-2)-1$

$=2\times(\sqrt{5})^3+8\times(\sqrt{5})^2+7\times\sqrt{5}-1=10\sqrt{5}+40+7\sqrt{5}-1$

$=39+17\sqrt{5}$

9. $f(x)=8x^3-12x^2+8x+1$，求 $f(1.501)$ 之近似值至小數點後第三位。

解　$2\times 1.501=3.002$

令 $f(x)=a(2x-3)^3+b(2x-3)^2+c(2x-3)+d$

由綜合除法

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 8 & -12 & +8 & +1 & \frac{3}{2} \\
 & & +12 & +0 & +12 & \\
\hline
2) & 8 & +0 & +8 & \boxed{+13} & \\
 & 4 & +0 & +4 & & \\
 & & +6 & +9 & &
\end{array}
$$

2） 4　+6 | +13

2　+3

+3

）2 | +6

1

故 $f(x)=(2x-3)^3+6(2x-3)^2+13(2x-3)+13$

$f(1.501)=(3.002-3)^3+6(3.002-3)^2+13(3.002-3)+13$

$=(0.002)^3+6(0.002)^2+13(0.002)+13\approx 0.026+13=13.026$

進階題

10.若 a，b，c 為三相異實數，且

$f(x)=\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$，試求：

(1) $f(a)$，$f(b)$，$f(c)$。

(2) $f(2)$。

解　(1) $f(a)=\dfrac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)}=1$

$f(b)=\dfrac{(b-c)(b-a)}{(b-c)(b-a)}=1$

$f(c)=\dfrac{(c-a)(c-b)}{(c-a)(c-b)}=1$

(2)因為 $(x-a)(x-b)$，$(x-b)(x-c)$，$(x-c)(x-a)$ 皆為 2 次多項式

故 $\deg(f(x))\leq 2$

且 $f(a)=f(b)=f(c)=1$　　故 $f(x)=1$

因此，$f(2)=1$

11.設 a，b 為正整數，且 $(13x+a)^2=(12x+b)^2+(5x+10)^2$ 對任意實數 x 恆成立，求 a，b 之值。

解　$169x^2+2\cdot 13\cdot ax+a^2=144x^2+2\cdot 12\cdot bx+b^2+25x^2+100x+100$

$=169x^2+(24b+100)x+b^2+100$

$\therefore 26a=24b+100 \Rightarrow 13a=12b+50$

$\Rightarrow a=\dfrac{12}{13}b+\dfrac{50}{13}$……………①

$a^2=b^2+100$………………②

①代入②得 $\left(\dfrac{12}{13}b+\dfrac{50}{13}\right)^2=b^2+100$

$\Rightarrow\dfrac{144}{169}b^2+\dfrac{1200}{169}b+\dfrac{2500}{169}=b^2+100$

$\Rightarrow\dfrac{25}{169}b^2-\dfrac{1200}{169}b+\dfrac{14400}{169}=0$

$\Rightarrow 25b^2-1200b+14400=0\Rightarrow(5b-120)^2=0$

$\therefore b=24$，故 $a=\dfrac{12}{13}b+\dfrac{50}{13}=26$

12.設 $f(x)$ 為一多項式。若 $(x+1)f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為 $5x+3$，求 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式。

解　設 $f(x)=(x^2+x+1)q(x)+ax+b$，$q(x)$ 是一多項式

則 $(x+1)f(x)=(x+1)(x^2+x+1)q(x)+(ax+b)(x+1)$

$\qquad\qquad\qquad=(x+1)(x^2+x+1)q(x)+ax^2+(a+b)x+b$

$(x+1)f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式等於 $ax^2+(a+b)x+b$ 除以 x^2+x+1 的餘式

$$\begin{array}{r|lll} & & & a \\ \hline 1+1+1 & a+ & (a+b)+ & b \\ & a+ & a\ + & a \\ \hline & & b & +(b-a) \end{array}$$

故 $bx+(b-a)=5x+3$，即 $b=5$，$a=2$

即 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為 $2x+5$

13.學生練習計算三次多項式 $f(x)=(x-1)g(x)$ 其中 $g(x)$ 為二次多項式。已知 $f(2011)=4020$，$f(2012)=2011$，$f(2013)=6036$，求 $f(2015)$。

解　$f(2011)=2010\cdot g(2011)\Rightarrow g(2011)=2$

$f(2012)=2011\cdot g(2012)\Rightarrow g(2012)=1$

$f(2013)=2012\cdot g(2013)\Rightarrow g(2013)=3$

令 $g(x)=A(x-2011)(x-2012)+B(x-2012)(x-2013)+C(x-2013)(x-2011)$

由 $g(2011)=2$ 得 $B(-1)(-2)=2\Rightarrow B=1$

由 $g(2012)=1$ 得 $C(-1)(1)=1\Rightarrow C=-1$

由 $g(2013)=3$ 得 $A\times2\times1=3\Rightarrow A=\dfrac{3}{2}$

$\therefore g(2015)=\dfrac{3}{2}(2015-2011)(2015-2012)+(2015-2012)(2015-2013)$

$\qquad-(2015-2013)(2015-2011)$

$\qquad=\dfrac{3}{2}\times4\times3+3\times2-2\times4=16$

故 $f(2015)=2014\times16=32224$

2-3　多項式方程式

基礎題

1.化簡下列各式：

(1) $(\sqrt{-5})(\sqrt{-6})(\sqrt{-2})$。

(2) $(3i)(-5i)\left(\frac{2}{3}i\right)$。

(3) $\left(\frac{i}{2}\right)\left(\frac{2i}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{-3}}{8}\right)\left(\frac{5}{\sqrt{-2}}\right)$。

解　(1) $(\sqrt{-5})(\sqrt{-6})(\sqrt{-2})=(\sqrt{5}\,i)(\sqrt{6}\,i)(\sqrt{2}\,i)$

$$=(\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2})\,i^3$$

$$=(2\sqrt{15})(-i)=-2\sqrt{15}\,i$$

(2) $(3i)(-5i)\left(\frac{2}{3}i\right)=(3)(-5)\left(\frac{2}{3}\right)\cdot i^3=(-10)(-i)=10i$

(3) $\left(\frac{i}{2}\right)\left(\frac{2i}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{-3}}{8}\right)\left(\frac{5}{\sqrt{-2}}\right)=\left(\frac{i}{2}\right)\left(\frac{2i}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}\,i}{8}\right)\left(\frac{5}{\sqrt{2}\,i}\right)$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{32\sqrt{2}}i^2=-\frac{5\sqrt{3}}{32\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{-5\sqrt{6}}{64}$$

2.求 $(1+i)^{10}$ 之值。

解　先計算 $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$，所以 $(1+i)^{10}=((1+i)^2)^5=(2i)^5=32i$

3.a，b 為實數，$\frac{3-i}{a+bi}=1+i$，求 $a+bi$ 之值。

解　$\frac{3-i}{a+bi}=1+i \Rightarrow 3-i=(a+bi)(1+i) \Rightarrow a+bi=\frac{3-i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{2-4i}{2}=1-2i$

4.k 為實數，試判定方程式 $x^2+kx+k+1=0$ 之根的性質。

解　$D=k^2-4(k+1)=k^2-4k-4=(k-(2+2\sqrt{2}))(k-(2-2\sqrt{2}))$

(1)當 $D>0$ 時，即（$k-(2+2\sqrt{2})$）（$k-(2-2\sqrt{2})$）>0，

得 $k>2+2\sqrt{2}$ 或 $k<2-2\sqrt{2}$ 時，原方程式的解為兩相異實根

(2)當 $D=0$，即 $k=2+2\sqrt{2}$ 或 $k=2-2\sqrt{2}$ 時，原方程式的解為重根

(3)當 $D<0$，即 $2-2\sqrt{2}<k<2+2\sqrt{2}$ 時，原方程式的解為兩共軛虛根

5.設 $1+i$ 為 $x^2+x-k=0$ 之一根，求 k 之值。

解

$(1+i)^2+(1+i)-k=0$ 得 $2i+(1+i)-k=0$ 即 $k=1+3i$

6.α，β 為 $x^2+3x+4=0$ 的兩根，試求：

(1)$\alpha+\beta$。(2)$\alpha^2+\beta^2$。(3)$\alpha^3+\beta^3$。(4)$\dfrac{\beta}{\alpha^2}+\dfrac{\alpha}{\beta^2}$。

解　由根與係數的關係知 $\alpha+\beta=-3$，$\alpha\beta=4$，

(1)$\alpha+\beta=-3$

(2)$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-3)^2-2\cdot4=1$

(3)$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)=(-3)(1-4)=9$

(4)$\dfrac{\beta}{\alpha^2}+\dfrac{\alpha}{\beta^2}=\dfrac{\beta^3+\alpha^3}{\alpha^2\beta^2}=\dfrac{9}{4^2}=\dfrac{9}{16}$

7.給定三次多項式 $f(x)=(x-4)(x-6)(x-8)+(x-5)(x-7)(x-9)$，

(1)試求 $f(4)$，$f(5)$。

(2)試證明 $f(x)=0$ 在 4 與 5 之間至少有一實根。

解　(1)$f(4)=0+(4-5)(4-7)(4-9)=(-1)(-3)(-5)=-15$

$f(5)=(5-4)(5-6)(5-8)+0=1\cdot(-1)(-3)=3$

(2)因為 $f(4)\cdot f(5)<0$，故由勘根定理知 $f(x)=0$ 在 4 與 5 之間至少有一實根

8.設 a，b 為實數，且多項方程式 $x^3+ax^2+bx+10=0$ 有一根為 $1+2i$，求此方程式的實根。

解　由虛根成對定理知另有一根 $1-2i$

多項式 $x^3+ax^2+bx+10=(x+c)(x-(1+2i))(x-(1-2i))$

$=(x+c)(x^2-2x+5)$

比較係數即知 $5c=10\Rightarrow c=2$　故此方程式有一實根 -2

9.解方程式 $x^3+3x^2+4x+4=0$。

解　由一次因式檢驗法，設 $ax-b$ 為一次因式 $a=\pm1$，$b=\pm1$，±2，±4 故 $\dfrac{b}{a}=\pm1$，±2，±4

令 $f(x)=x^3+3x^2+4x+4$，$f(-2)=-8+12-8+4=0$

故 $(x+2)$ 為 $f(x)$ 的一次因式

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & +3 & +4 & +4 & -2 \\ & -2 & -2 & -4 & \\ \hline 1 & +1 & +2 & +0 & \end{array}$$

$f(x)=(x+2)(x^2+x+2)$

$x^2+x+2=0$ 的兩根為 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot2}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}\,i}{2}$

故 $f(x)=0$ 的三根為 $x=-2$，$\dfrac{-1+\sqrt{7}\,i}{2}$，$\dfrac{-1-\sqrt{7}\,i}{2}$

進階題

10.假設 a 是正實數，且實係數一元二次方程式 $x^2+kx+1=0$ 有一根 $\dfrac{a}{3}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}i$。試求：

(1)a 之值。　　(2)k 之值。

解　(1)因為實係數多項式方程式虛根成對，故知另一根為 $\dfrac{a}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}i$

由根與係數的關係知，$\left(\dfrac{a}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}i\right)\left(\dfrac{a}{3}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}i\right)=1$，得 $\dfrac{a^2}{9}+\dfrac{8}{9}=1$，故得 $a=1$

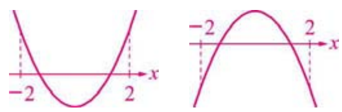
(2)$-k=\left(\dfrac{a}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}i\right)+\left(\dfrac{a}{3}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}i\right)=\dfrac{2a}{3}=\dfrac{2}{3}$　　得 $k=-\dfrac{2}{3}$

11.二次方程式 $ax^2-(a-1)x-6=0$ 有一根在 1 與 2 之間，另一根在 -1 與 -2 之間，求實數 a 之範圍。

解　令 $f(x)=ax^2-(a-1)x-6$

由題意知 $f(1)f(2)<0$ 且 $f(-1)f(-2)<0$

而且由下圖知，$f(2)$，$f(-2)$ 同號，即 $f(2)f(-2)>0$



所以 $(2a-4)(6a-8)>0$，$-5(2a-4)<0$ 且 $(2a-7)(6a-8)<0$

整理可得 $\begin{cases} a>2 \text{或} a<\dfrac{4}{3}, \\ a>2, \\ \dfrac{4}{3}<a<\dfrac{7}{2}, \end{cases}$　　故 $2<a<\dfrac{7}{2}$

12.設整係數方程式 $x^4+3x^3+bx^2+cx+10=0$ 有四相異有理根，求此四根。

解　由一次因式檢驗法知，若 $ax-b$ 為 $x^4+3x^3+bx^2+cx+10$ 之因式

則 a 整除 1，且 b 整除 10，故因式 $ax-b$ 對應的根$\frac{b}{a}$為一整數

故可令原方程式之有理根為 p，q，r，s，其中 p，q，r，s 為相異整數

$x^4+3x^3+bx^2+cx+10=(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$

比較係數知 $p+q+r+s=-3$

$p\cdot q\cdot r\cdot s=10=2\times 5$

故知 p，q，r，s 必為±1，±2，±5，±10 其中一部分

經窮舉知 p，q，r，s 為 1，-1，2，-5

2-4　多項式函數的圖形與多項式不等式

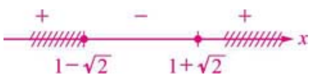
基礎題

1.解下列不等式：(1)$x^2+5x-6<0$。 (2)$x^2-2x-1\geq 0$。

解　(1)$x^2+5x-6<0$⇨$(x-1)(x+6)<0$⇨$-6<x<1$

(2)$x^2-2x-1=0$ 之兩根為$\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2}=1\pm\sqrt{2}$

故 $x^2-2x-1\geq 0$⇨$(x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{2}))\geq 0$



故 $x\leq 1-\sqrt{2}$ 或 $x\geq 1+\sqrt{2}$

2.若 $f(x)$ 是二次函數且 $f(x)\leq 0$ 的解為「$x\leq 1$ 或 $x\geq 9$」，則 $f(x)$ 可能是下列何者？

(A)$f(x)=(x-1)(x-9)$　(B)$f(x)=2(x-1)(x-9)$
(C)$f(x)=(1-x)(9-x)$　(D)$f(x)=(1-x)(x-9)$

解　(A)(B)(C)的解皆為$(x-1)(x-9)\leq 0$⇨$1\leq x\leq 9$

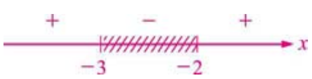
(D)的解為$-(x-1)(x-9)\leq 0$⇨$(x-1)(x-9)\geq 0$⇨$x\leq 1$ 或 $x\geq 9$　故選(D)

3.解下列不等式：
(1)$(2-x)(x+3)(x+4)<0$。　(2)$(x+2)(x+3)(x+4)^2<0$。

解　(1)$(2-x)(x+3)(x+4)<0$⇨$(x-2)(x+3)(x+4)>0$

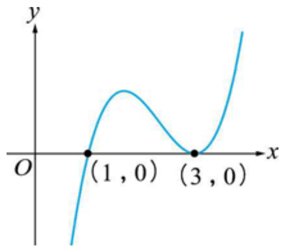
故得$-4<x<-3$ 或 $x>2$

(2)$(x+4)^2$恆不為負，故原式⇨$(x+2)(x+3)<0$



故$-3<x<-2$

4.若 $f(x)=(x-1)(x-3)^2$ 的圖形如下：則下列何者是不等式 $f(x)+1>0$ 的解？



(A)0　　(B)3　　(C)1.001　　(D)2.999

解　(A)×：考慮 $f(0)=(-1)(-3)^2=-9<0$

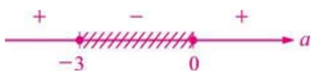
(B)(C)(D)○：$y=f(x)+1$ 的圖形是 $y=f(x)$ 上移 1 單位，故 $f(x)+1>0$ 的解包含區間 $(1,\infty)$

故選(B)(C)(D)

5.若對所有的實數 x，$3x^2+2ax-a\geq 0$ 均成立，求 a 的範圍。

解　判別式 $D=(2a)^2-4\cdot 3\cdot(-a)\leq 0$

故 $4a^2+12a\leq 0 \Rightarrow a^2+3a\leq 0 \Rightarrow a(a+3)\leq 0$



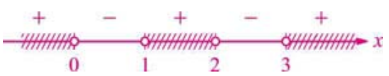
得 $3\leq a\leq 0$

6.解下列分式不等式：

(1) $\dfrac{x^2-3x}{(x-1)(x-2)}>0$。(2) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}<0$。

解　(1) $\dfrac{x^2-3x}{(x-1)(x-2)}>0$ 與 $(x^2-3x)(x-1)(x-2)>0$ 有相同解

$x(x-3)(x-1)(x-2)>0$



故 $x<0$ 或 $1<x<2$ 或 $x>3$

(2)通分得 $\dfrac{(x+2)-x}{x(x+2)}<0$，故 $\dfrac{2}{x(x+2)}<0$　即 $x(x+2)<0$

故 $-2<x<0$

7.解不等式 $(x^2-x)^2-5(x^2-x)-6\leq 0$。

解　令 $t=x^2-x$

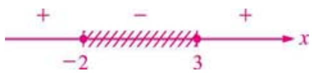
原式為 $t^2-5t-6\leq 0$

$\Rightarrow (t+1)(t-6)\leq 0 \Rightarrow (x^2-x+1)(x^2-x-6)\leq 0$

$\Rightarrow (x^2-x+1)(x+2)(x-3)\leq 0$

由 x^2-x+1 之判別式 $D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 1<0$

知 x^2-x+1 恆為正　故 $(x+2)(x-3)\leq 0$



得 $-2\leq x\leq 3$

8.求不等式 $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x+3}\geq 1$ 的解。

解　移項通分得

$\dfrac{(x^2-7x+12)-(x^2-2x+3)}{x^2-2x+3}\geq 0 \Rightarrow \dfrac{-5x+9}{x^2-2x+3}\geq 0$

$\Rightarrow (-5x+9)(x^2-2x+3)\geq 0$（因為 x^2-2x+3 恆正，由 $(-2)^2-4\cdot 1\cdot 3<0$ 知）

$\Rightarrow -5x+9\geq 0 \Rightarrow 5x-9\leq 0 \Rightarrow x\leq \dfrac{9}{5}$

進階題

9.若不等式 $ax^2-x+b>0$ 的解為 $-\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{1}{2}$，求實數數對 (a, b)。

解　$-\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{1}{2}$ 對應的二次不等式為 $\left(x+\dfrac{2}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)<0$　即 $x^2+\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{3}<0$

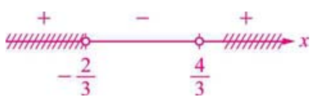
$\Rightarrow -x^2-\dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{3}>0 \Rightarrow -6x^2-x+2>0$

比較原不等式係數可得 $a=-6$，$b=2$

故實數數對 $(a, b)=(-6, 2)$

10.設 $f(x)$ 為二次函數，且不等式 $f(x)>0$ 之解為 $-2<x<4$，求 $f(3x)<0$ 之解。

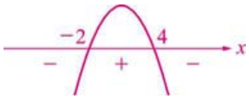
解



$f(x)=a(x+2)(x-4)$，$a<0$

故 $f(3x)<0 \Leftrightarrow a(3x+2)(3x-4)<0$

故 $f(3x)<0 \Leftrightarrow (3x+2)(3x-4)>0$

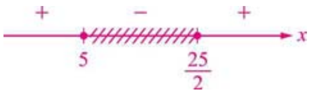


解得 $x<-\frac{2}{3}$ 或 $x>\frac{4}{3}$

11.試問不等式 $(x^2+x+2)(x-5)(2x-25)\leq 0$ 有多少個整數解？

解　x^2+x+2 的判別式 $1^2-4\cdot 1\cdot 2<0$ 故 x^2+x+2 恆正

故原不等式 $\Leftrightarrow (x-5)(2x-25)\leq 0$　得 $5\leq x\leq \frac{25}{2}$



故整數解為 5，6，7，8，9，10，11，12，共 8 個

12.若已知一實係數方程式 $f(x)=x^3+ax+b=0$ 之一複數根為 $1-2i$，試求：

(1)數對 (a, b)。　　(2)滿足 $f(x)<0$ 的解。

解　(1)虛根成對知 $f(x)=(x-(1-2i))(x-(1+2i))(x+c)=(x^2-2x+5)(x+c)$

比較係數可得 $c-2=0$，$5-2c=a$，$5c=b$

因此 $c=2$，$b=10$，$a=1$　得數對 $(a, b)=(1, 10)$

(2) $f(x)=(x^2-2x+5)(x+2)<0 \Leftrightarrow x+2<0$　即 $x<-2$

第 2 章　綜合演練

一、多選題（每題 8 分，錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，其餘不給分，共 32 分）

（(C)(D)）1.下列敘述何者正確？

(A)$5+4i>3+4i$　　(B)a，$b\in\mathbb{C}$，$a^2+b^2=0$，則 $a=b=0$

(C)a，$b\in\mathbb{C}$，$ab=0$，則 $a=0$ 或 $b=0$

(D)若 z 為複數，且 $z=\overline{z}$，則 z 必為實數

解　(A)×：複數不能比大小

(B)×：$1^2+i^2=0$

(C)○：若 $a\neq 0$，則 $b=\dfrac{0}{a}=0$；若 $b\neq 0$，則 $a=\dfrac{0}{b}=0$

(D)○：若 z 不為實數，則 z 與 $\overline{z}$ 的虛部不同

故選(C)(D)

（(A)(B)）2.設 $f(x)$ 為三次實係數多項式，且知複數 $1+i$ 為 $f(x)=0$ 之一解。試問下列哪些敘述是正確的？

(A)$f(1-i)=0$　(B)$f(2+i)\neq 0$　(C)沒有實數 x 滿足 $f(x)=x$

(D)沒有實數 x 滿足 $f(x^3)=0$

解　(A)○：因為實係數多項式方程式虛根成對

(B)○：若 $f(2+i)=0$，則 $f(x)=0$ 有四相異根，

但 $f(x)$ 為三次實係數多項式，$f(x)=0$ 只有三個根

(C)×：考慮 $f(x)-x=0$ 為三次實係數方程式，至少有一實根

(D)×：$f(x^3)=0$ 為九次實係數方程式，至少有一實根

故選(A)(B)

（(B)(C)）3.設 $f(x)=x^3-2x+\dfrac{1}{2}$，則 $f(x)=0$ 在下列哪些連續整數之間可以找到實根？

(A)-1 與 0 之間　(B)0 與 1 之間　(C)1 與 2 之間　(D)2 與 3 之間

解

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$-\dfrac{7}{2}$	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{9}{2}$

$f(x)$ 為三次實係數多項式，$f(x)=0$ 只有三個根

由勘根定理 $f(x)=0$ 在 -2 與 -1 間、0 與 1 間與 1 與 2 之間都至少有一根

故 $f(x)=0$ 三根在上述三個區間各一個　因此，(B)(C)正確

（(A)(B)）4.若 $f(x)=\dfrac{(x-8)(x-2)(x-7)}{(1-8)(1-2)(1-7)}+4\cdot\dfrac{(x-1)(x-7)(x-8)}{(2-1)(2-7)(2-8)}+49\cdot\dfrac{(x-1)(x-2)(x-8)}{(7-1)(7-2)(7-8)}+64\cdot\dfrac{(x-1)(x-2)(x-7)}{(8-1)(8-2)(8-7)}$，則下列何正確？

(A)$f(1)=1$　(B)$f(2)=4$　(C)$f(13)=28$　(D)$f(x)$ 是一 3 次多項式

解　(A)○：$f(1)=\dfrac{(1-8)(1-2)(1-7)}{(1-8)(1-2)(1-7)}+4\cdot\dfrac{(1-1)(1-7)(1-8)}{(2-1)(2-7)(2-8)}$

$+49\cdot\dfrac{(1-1)(1-2)(1-8)}{(7-1)(7-2)(7-8)}+64\cdot\dfrac{(1-1)(1-2)(1-7)}{(8-1)(8-2)(8-7)}=1$

(B)○：$f(2)=\dfrac{(2-8)(2-2)(2-7)}{(1-8)(1-2)(1-7)}+4\cdot\dfrac{(2-1)(2-7)(2-8)}{(2-1)(2-7)(2-8)}$

$+49\cdot\dfrac{(2-1)(2-2)(2-8)}{(7-1)(7-2)(7-8)}+64\cdot\dfrac{(2-1)(2-2)(2-7)}{(8-1)(8-2)(8-7)}=4$

(C)(D)×：考慮 $f(1)=1$，$f(2)=2^2=4$，$f(7)=7^2$，$f(8)=8^2$，

又 $\deg(f(x))\leq 3$，故 $f(x)=x^2$，因此 $f(13)=169$

故選(A)(B)

二、填充題（除第 14.題，其餘每格 6 分，共 68 分）

5.求 $(-1+i)^{10}+(-1-i)^{10}=$ __0__。

解　$(-1+i)^2=1-2i+i^2=-2i$，$(-1-i)^2=1+2i+i^2=2i$

因此，$(-1+i)^{10}+(-1-i)^{10}=(-2i)^5+(2i)^5=-32i+32i=0$

6.求 $f(x)=7x^{18}-5x^{13}+6x^9-13x^2+5$，求 $f(x)\div(x+1)$ 的餘式為__-2__。

解　由餘式定理知 $f(x)\div(x+1)$ 的餘式為

$f(-1)=7(-1)^{18}-5(-1)^{13}+6(-1)^9-13(-1)^2+5$

$=7+5-6-13+5=-2$

7.若 $y=x^3$ 的圖形向右平移 a 單位，再向上平移 2 單位後變成 $y=x^3-3x^2+bx+c$ 的圖形，求 $a+b+c=$ __5__。

解　$y=x^3\xrightarrow{\text{右移}a\text{單位，上移2單位}}y=(x-a)^3+2$

比較 $y=x^3-3x^2+bx+c=(x-1)^3+(b-3)x+(c+1)$ 的係數知

$a=1$，$b-3=0\Rightarrow b=3$，$c+1=2$ 故 $a+b+c=5$

8.設 x，$y\in\mathbb{R}$，且 $2x+y=4$，求 x^2+y^2 之最小值為__$\dfrac{16}{5}$__。

解　$y=4-2x$，所以 $x^2+y^2=x^2+(4-2x)^2=5x^2-16x+16$

配方可得 $5x^2-16x+16=5\left(x-\dfrac{8}{5}\right)^2+\dfrac{16}{5}$　故最小值為 $\dfrac{16}{5}$

9.設函數 $f(x)=x^2+ax+b$，對任意實數 t，都有 $f(2+t)=f(2-t)$，且 $f(3)=0$，求數對 $(a, b)=$ __$(-4, 3)$__。

解　因為 $f(2+t)=f(2-t)$，所以 $y=f(x)$ 的對稱軸為 $x=2$

故 $f(x)=x^2+ax+b=(x-2)^2+k$

又因為 $f(3)=0$，所以 $(3-2)^2+k=0 \Rightarrow k=-1$

比較 $x^2+ax+b=(x-2)^2-1$ 係數得 $a=-4$，$b=3$　故數對 $(a, b)=(-4, 3)$

10.以 x^2+x-2 除 $5x^5-5x^4+7x^3-6x^2+ax+b$ 所得餘式為 $x-3$，求數對 $(a, b)=$ <u>$(-106, 103)$</u>。

解

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5-10+\quad 27\quad -\quad 53 \\ \hline
1+1-2) & 5-\ 5+\ 7-\ 6+\quad a\quad +\quad b \\
 & 5+\ 5-10 \\ \hline
 & \quad -10+17-\ 6 \\
 & \quad -10-10+20 \\ \hline
 & \qquad\quad 27-26+\ a \\
 & \qquad\quad 27+27-54 \\ \hline
 & \qquad\qquad -53+(a+54)+\quad b \\
 & \qquad\qquad -53-\quad 53\quad +\quad 106 \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad (a+107)+(b-106)
\end{array}
$$

因此 $a+107=1$，$b-106=-3$，得 $a=-106$，$b=103$

故數對 $(a, b)=(-106, 103)$

11.求 $11^5-4\cdot 11^4-72\cdot 11^3-56\cdot 11^2+15\cdot 11+7=$ <u>51</u>。

解 令 $f(x)=x^5-4x^4-72x^3-56x^2+15x+7$，原式 $=f(11)$

由餘式定理知，$f(11)$ 為 $f(x)$ 被 $x-11$ 除所得的餘數

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
1 & -14 & -72 & -56 & +15 & +\ 7 & 11 \\
 & 11 & +77 & +55 & -11 & +44 & \\ \hline
1 & +\ 7 & +\ 5 & -\ 1 & +4 & +51 &
\end{array}
$$

因此，$f(11)=51$

12.設 a 為實數，令 α、β 為二次方程式 $x^2+ax+(2a-3)=0$ 的兩個實根。試求 $\alpha^2+\beta^2$ 的最小值為 <u>2</u>。

解 由根與係數的關係知 $\begin{cases}\alpha+\beta=-a \\ \alpha\beta=2a-3\end{cases}$，

$D=a^2-4\cdot 1\cdot(2a-3)\geq 0 \Rightarrow a^2-8a+12\geq 0 \Rightarrow (a-2)(a-6)\geq 0 \Rightarrow a\geq 6$ 或 $a\leq 2$

因此 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=a^2-4a+6=(a-2)^2+2$ 因 $a\geq 6$ 或 $a\leq 2$，最小值 2

13.多項式 $f(x)$ 以 $x-1$ 除之餘式為 2，以 $x+2$ 除之餘式為 -4，則 $f(x)$ 以 x^2+x-2 除之餘式為 <u>$2x$</u>。

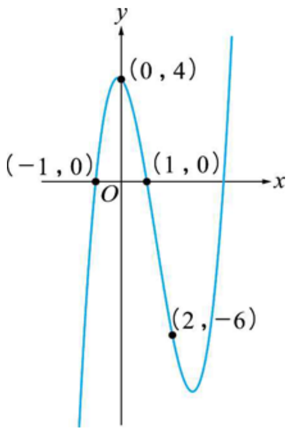
解 令 $f(x)=(x^2+x-2)\,q(x)+ax+b$

$\qquad\quad =(x-1)(x+2)\,q(x)+ax+b$

依題意由餘式定理知，$f(1)=2$，$f(-2)=-4$

故 $a+b=2$，$-2a+b=-4$，得 $a=2$，$b=0$ 故所求為 $2x$

14.若 $f(x)$ 的圖形如下：



(1)求 $f(-1)=$ __0__，$f(0)=$ __4__，$f(1)=$ __0__，$f(2)=$ __-6__。(每格 1 分)

(2)$f(x)=ax(x-1)(x+1)+b(x+1)x(x-2)+c(x+1)(x-1)(x-2)+dx(x-1)(x-2)$，求序組 $(a,b,c,d)=$ __$(-1,0,2,0)$__。(5 分)

(3)若 $f(x)$ 為一三次多項式，試求 $f(x)>0$ 之解為 __$-1<x<1$ 或 $x>4$__。(5 分)

解　(1)圖形通過點 $(-1,0)$，$(0,4)$，$(1,0)$，$(2,-6)$，故

$f(-1)=0$，$f(0)=4$，$f(1)=0$，$f(2)=-6$

(2)$f(-1)=d(-1)(-1-1)(-1-2)=0 \Rightarrow d=0$

$f(0)=c(1)(-1)(-2)=4 \Rightarrow c=2$

$f(1)=b(1+1)(1)(1-2)=0 \Rightarrow b=0$

$f(2)=a\cdot 2(2-1)(2+1)=-6 \Rightarrow a=-1$

故序組 $(a,b,c,d)=(-1,0,2,0)$

(3)解 $f(x)=-x(x-1)(x+1)+2(x+1)(x-1)(x-2)>0$，化簡得

$(x+1)(x-1)(-x+2(x-2))>0$

$\Rightarrow (x+1)(x-1)(x-4)>0$

故解為 $-1<x<1$ 或 $x>4$