第 1 章　數與式

1-1　數與數線

基礎題

1.下列何者為有理數？

(A)$0.\overline{34}$　(B)$\sqrt{3}$　(C)π　(D)$(\sqrt{7})^2$　(E)$\sqrt{4+5}$

解　(A)○：循環小數必為有理數

(B)×：$\sqrt{3}$是無理數

(C)×：π是無理數

(D)○：$(\sqrt{7})^2=7$是有理數

(E)○：$\sqrt{4+5}=\sqrt{9}=3$是有理數　故選(A)(D)(E)

2.計算下列各式（答案表示成小數）：

(1)$0.\overline{3}+0.\overline{6}$。

(2)$0.\overline{3}\times0.\overline{6}$。

解　(1)$0.\overline{3}=\frac{3}{9}$，$0.\overline{6}=\frac{6}{9}$　$\therefore 0.\overline{3}+0.\overline{6}=\frac{3}{9}+\frac{6}{9}=1$

(2)$0.\overline{3}\times0.\overline{6}=\frac{3}{9}\times\frac{6}{9}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}=0.\overline{2}$

3.下列哪些有理數可化為有限小數？

(A)$\frac{41}{16}$　(B)$\frac{139}{15}$　(C)$\frac{3}{50}$　(D)$\frac{27}{128}$　(E)$\frac{27}{15}$

解　最簡分數$\frac{m}{n}$，若 n 只有 2，5 的質因數，則$\frac{m}{n}$為有限小數，不然就是循環小數

(A)○：$16=2^4$，故$\frac{41}{16}$為有限小數

(B)×：$15=3\times5$，故$\frac{139}{15}$為循環小數

(C)○：$50=2\times5^2$，故$\frac{3}{50}$為有限小數

(D)○：$128=2^7$，故$\frac{27}{128}$為有限小數

(E)○：$\frac{27}{15}=\frac{9}{5}$為有限小數　故選(A)(C)(D)(E)

4.化簡下列各式：

(1)$\dfrac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$。

(2)$\dfrac{a^2-b^2}{ab}-\dfrac{ab-b^2}{ab-a^2}$（$a$，$b$ 為相異的非零實數）。

解　(1)$\dfrac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{b+a}{ab}\right)}=\dfrac{2ab}{a+b}$

(2)$\dfrac{a^2-b^2}{ab}-\dfrac{ab-b^2}{ab-a^2}=\dfrac{a^2-b^2}{ab}-\dfrac{b(a-b)}{a(b-a)}=\dfrac{a^2-b^2}{ab}-\left(-\dfrac{b}{a}\right)=\dfrac{a^2-b^2}{ab}+\dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$

$=\dfrac{a^2-b^2}{ab}+\dfrac{b^2}{ab}=\dfrac{a^2-b^2+b^2}{ab}=\dfrac{a^2}{ab}=\dfrac{a}{b}$

5.$\sqrt{\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{4^2}+1}$等於下列哪一個選項？

(A)1.01　(B)1.05　(C)1.1　(D)1.15　(E)1.21。

解　$\sqrt{\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{4^2}+1}=\sqrt{\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{16}+1}=\sqrt{\dfrac{16+25}{400}+1}=\sqrt{\dfrac{441}{400}}=\sqrt{\left(\dfrac{21}{20}\right)^2}=\dfrac{21}{20}=1.05$ 故選(B)

6.x，y，z 是整數，$\sqrt{(x-3)^2}+2|y|+3|z|=1$，則序組$(x, y, z)$有幾組解？

解　觀察知 $2|y|$，$3|z|$ 分別為 2 及 3 的倍數

故 $2|y|=0$，$3|z|=0$，得 $y=0$，$z=0$　由原式可得$\sqrt{(x-3)^2}=1$

所以 $|x-3|=1 \Rightarrow x-3=\pm 1$，即 $x=4$ 或 $x=2$　所以序組(x, y, z)共有 2 組解

7.計算$\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{5^2}\right)$之值。

解　$\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{5^2}\right)$

$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{5}\right)\left(1+\dfrac{1}{5}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\underbrace{\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{3}}}\cdot\underbrace{\dfrac{4}{\cancel{3}}\cdot\dfrac{\cancel{3}}{4}}\cdot\underbrace{\dfrac{\cancel{5}}{4}\cdot\dfrac{4}{\cancel{5}}}\cdot\dfrac{6}{5}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6}{5}=\dfrac{3}{5}$

相乘為 1

進階題

8.設 $x=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$，試求下列各式：

(1)$x+\dfrac{1}{x}$。　(2)$x^2+\dfrac{1}{x^2}$。　(3)$x^3+\dfrac{1}{x^3}$。

解　(1)$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$

$=\dfrac{(5+3-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3})+(5+3+2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3})}{2}=\dfrac{16}{2}=8$

(2)$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$

$\therefore 64=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$，得 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=62$

(3)$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}-x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=8\cdot(62-1)=8\cdot 61=488$

9.比較下列各數的大小關係：

(1)$a=\sqrt{11}+\sqrt{7}$，$b=\sqrt{13}+\sqrt{5}$。

(2)$a=\sqrt{5}-2$，$b=\sqrt{6}-\sqrt{5}$，$c=\sqrt{7}-\sqrt{6}$。

解　(1)$a^2=11+7+2\cdot\sqrt{11}\cdot\sqrt{7}=18+2\sqrt{77}$

$b^2=13+5+2\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}=18+2\sqrt{65}$

因為 $\sqrt{77}>\sqrt{65}$，故 $a^2>b^2$，得 $a>b$

(2)$(\sqrt{5}-2)\times\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$

$(\sqrt{6}-\sqrt{5})\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

$(\sqrt{7}-\sqrt{6})\times\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$

因為 $\sqrt{7}+\sqrt{6}>\sqrt{6}+\sqrt{5}>\sqrt{5}+2$　故 $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}<\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}<\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$　即 $a>b>c$

10.已知 x，y 為有理數，若 $x+(\sqrt{12}-6)y+\dfrac{23}{2+\sqrt{27}}=0$，試求數對 (x, y)。

解　$\dfrac{23}{2+\sqrt{27}}\times\dfrac{\sqrt{27}-2}{\sqrt{27}-2}=\dfrac{23(\sqrt{27}-2)}{23}=\sqrt{27}-2=3\sqrt{3}-2$

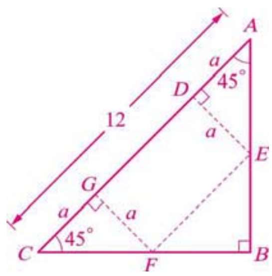
所以原式化簡為 $x+(2\sqrt{3}-6)y+(3\sqrt{3}-2)=0$，

即 $(x-6y-2)+(2y+3)\sqrt{3}=0$，得 $\begin{cases}x-6y-2=0\\2y+3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{3}{2}\\x=-7\end{cases}$

故數對 $(x, y)=\left(-7, -\dfrac{3}{2}\right)$

11.某人有一塊斜邊長為 12 公尺的等腰直角三角形形狀的花圃，今欲在此花圃中挖出一個面積最大的矩形水池，且水池的一邊是在三角形的斜邊上，求此水池的最大面積。

解　如下圖，若此一水池一邊寬為 a（$\overline{DE}$邊）公尺



因為 $\triangle ADE$，$\triangle CGF$ 為等腰直角三角形，

$\angle ADE=90°$，$\angle CGF=90°$

故此矩形長為 $12-2a$ 公尺

令 $b=12-2a$，則 $2a+b=12$，a，$b>0$

矩形的面積 ab，由算幾不等式知

$\dfrac{2a+b}{2}\geq\sqrt{2a\cdot b}$　$\Rightarrow 6\geq\sqrt{2ab}\Rightarrow ab\leq 18$　故此水池的最大面積為 18 平方公尺

12.設 $a=\sqrt{7+\sqrt{47}}$，則 a 在哪兩個連續整數之間？

(A)0 與 1　(B)1 與 2　(C)2 與 3　(D)3 與 4　(E)4 與 5。

解　$6^2=36<47<7^2=49$，故 $6<\sqrt{47}<7$，得 $13<7+\sqrt{47}<14$，即 $\sqrt{13}<a<\sqrt{14}$，

又 $3<\sqrt{13}$，$\sqrt{14}<4$，所以 $3<a<4$　故選(D)

1-2　數線上的幾何

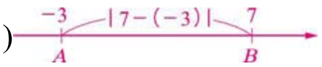
基礎題

1.數線上兩點 $A(-3)$，$B(7)$。

(1)求 $\overline{AB}$ 之長。

(2)求 $\overline{AB}$ 的中點坐標。

(3)已知點 $P(x)$ 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$，求 x 之值。

解 (1)

$|7-(-3)|=10$

(2) $\overline{AB}$ 的中點坐標為 $\dfrac{7+(-3)}{2}=2$

(3)由分點公式得 $x=\dfrac{2\times(-3)+3\times7}{3+2}=\dfrac{15}{5}=3$

2.解下列各不等式：

(1) $|x|\leq3$。

(2) $|x-1|\leq3$。

(3) $|x-1|\geq2$。

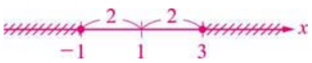
解 (1) $|x|\leq3\Rightarrow-3\leq x\leq3$

(2)配合數線觀察

$-3\leq x-1\leq3\Rightarrow-2\leq x\leq4$

(3)配合數線觀察

$|x-1|\geq2\Rightarrow x-1\geq2$ 或 $x-1\leq-2$，得 $x\geq3$ 或 $x\leq-1$



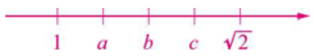
3.設 a，b 為整數，若 $|a|+|b|=1$，求數對 (a,b)。(四解)

解 $|a|=0\Rightarrow\begin{cases}|b|=1\\|a|=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=\pm1\\a=0\end{cases}$　　$|a|=1\Rightarrow\begin{cases}|a|=1\\|b|=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\pm1\\b=0\end{cases}$

故數對 $(a,b)=(0,1)$，$(0,-1)$，$(1,0)$，$(-1,0)$

4.試比較$\frac{3+\sqrt{2}}{4}$，$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，$\frac{1+3\sqrt{2}}{4}$三數的大小關係。

解



如上圖，a、b、c 分別為 1，$\sqrt{2}$ 的第 1、2、3 個四等分點

即 $a=\frac{3+\sqrt{2}}{4}$，$b=\frac{2+2\sqrt{2}}{4}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，$c=\frac{1+3\sqrt{2}}{4}$

故 $a<b<c$，即$\frac{3+\sqrt{2}}{4}<\frac{1+\sqrt{2}}{2}<\frac{1+3\sqrt{2}}{4}$

進階題

5.試解下列各方程式：

(1)$|2x-3|=5$。

(2)$|x+1|=|x-3|$。

解 (1)$2x-3=5$ 或 $2x-3=-5$

$2x=8$ 或 $2x=-2$　　$x=4$ 或 $x=-1$

(2)$x+1=x-3$（矛盾式）或 $x+1=-(x-3)$ 得 $2x-2=0$ 即 $x=1$

6.設 a，b 為有理數，且 $a<b$，試比較$\frac{2a+b}{3}$，$\frac{3a+b}{4}$，$\frac{4a+b}{5}$三數的大小關係。

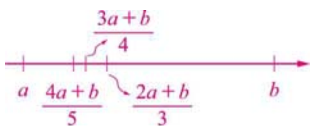
解

利用分點公式

$\frac{2a+b}{3}$是 a，b 間的第 1 個三等分點

$\frac{3a+b}{4}$是 a，b 間的第 1 個四等分點

$\frac{4a+b}{5}$是 a，b 間的第 1 個五等分點

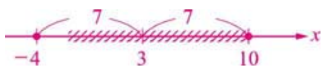


所以$\frac{4a+b}{5}<\frac{3a+b}{4}<\frac{2a+b}{3}$

7.若將區域$-4\leq x\leq 10$ 表示成$|x-a|\leq b$，求數對(a, b)。

解 先找出中心點$\frac{-4+10}{2}=3$

再找出中心至端點距離 $10-3=7$（$=|3-(-4)|$）



所以 $-4\leq x\leq 10$ 對應到不等式 $|x-3|\leq 7$　即 $a=3$，$b=7$

故數對 $(a, b)=(3, 7)$

8.試解下列各不等式：

(1) $|2x-1|<x+4$。

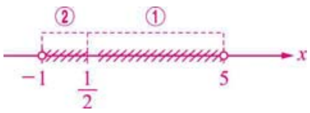
(2) $|x-1|\geq|x-3|$。

解　(1)分成 $2x-1\geq 0$ 或 $2x-1<0$ 討論：

①若 $2x-1\geq 0$ 時，$2x-1<x+4 \Rightarrow \begin{cases} x\geq\frac{1}{2} \\ x<5 \end{cases}$

②若 $2x-1<0$ 時，$-(2x-1)<x+4 \Rightarrow \begin{cases} x<\frac{1}{2} \\ 3x+3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\frac{1}{2} \\ x>-1 \end{cases}$

綜合①、②，得 $-1<x<5$



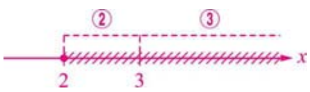
(2)將 x 分成①$x<1$；②$1\leq x\leq 3$；③$x>3$ 三種情形討論：

①$x<1$ 時，$1-x\geq 3-x$，矛盾式

②$1\leq x\leq 3$ 時，$x-1\geq 3-x \Rightarrow 2x\geq 4 \Rightarrow x\geq 2$　故 $2\leq x\leq 3$

③$x>3$ 時，$x-1\geq x-3$　得 $-1\geq -3$（恆成立），故 $x>3$

綜合①、②、③，得 $x\geq 2$



9.解不等式 $|x-2|+|x-6|\leq|2x-8|$。

解　在數線上分段討論：

①$x\leq 2$ 時，$2-x+6-x\leq 8-2x$⇨$8-2x\leq 8-2x$ 恆成立　所以，此時解為 $x\leq 2$

②$2<x\leq 4$ 時，$x-2+6-x\leq 8-2x$⇨$4\leq 8-2x$⇨$x\leq 2$　所以，此時沒有解

③$4<x<6$ 時，$x-2+6-x\leq 2x-8$⇨$4\leq 2x-8$⇨$x\geq 6$　所以，此時沒有解

④$x\geq 6$ 時，$x-2+x-6\leq 2x-8$⇨$2x-8\leq 2x-8$ 恆成立

所以，此時解為 $x\geq 6$

綜合①～④，得不等式的解為 $x\leq 2$ 或 $x\geq 6$

10.郊區一筆直的路段設有水廠和瓦斯廠各一座，其坐標如下圖所示。因為管線鋪設的費用分攤，沿路居民水及瓦斯擬收取基本費用，其計算方式為：住戶到瓦斯廠距離的 3 倍加上住戶到水廠的距離為該住戶的基本費（單位：元）。試求該路段基本費不超過 18 元的區域範圍。

解　若住戶的位置為 x，則住戶到瓦斯廠距離為 $|x-4|$，到水廠距離為 $|x+2|$

故水電基本費為 $3|x-4|+|x+2|\leq 18$

故本題求解的範圍為 $3|x-4|+|x+2|\leq 18$

在數線上分段討論：

①$x<-2$ 時，

$3(4-x)-(x+2)\leq 18$⇨$10-4x\leq 18$⇨$4x\geq -8$⇨$x\geq -2$

所以，此時沒有解

②$-2\leq x\leq 4$ 時，$3(4-x)+(x+2)\leq 18$⇨$14-2x\leq 18$⇨$2x\geq -4$⇨$x\geq -1$

所以，此時解為 $-1\leq x\leq 4$

③$x>4$ 時，$3(x-4)+(x+2)\leq 18$⇨$4x-10\leq 18$⇨$4x\leq 28$⇨$x\leq 7$

所以，此時解為 $4<x\leq 7$

綜合①、②、③，得不等式的解為 $-1\leq x\leq 7$

第 1 章　綜合演練

一、單選題（每題 4 分，共 12 分）

（(D)）1.下列何者是有理數？

(A)$\sqrt{3}-1$　(B)π　(C)$\sqrt{17}$　(D)$\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}-\sqrt{2}$

解　因為$\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}-\sqrt{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\times\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}=\sqrt{2}-1-\sqrt{2}=-1$ 為有理數故(D)

（(D)）2.下列哪一個數值最大？

(A)$\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{3}$　(B)$\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3}$　(C)$\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{5}}{4}$

(D)$\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{4}$　(E)$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2}$

解　由分點公式，

$\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{3}$為$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$間第 2 個三等分點；$\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3}$為$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$間第 1 個三等分點

$\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{5}}{4}$為$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$間第 1 個四等分點；$\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{4}$為$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$間第 3 個四等分點

$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2}$為$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$間第 2 個四等分點

故$\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{4}$最大　故選(D)

（(D)）3.x，y 皆為實數，且滿足｜$x-3$｜≤ 2，且 $x+y=6$，則下列各式之範圍何者不正確？

(A)$1\leq x\leq 5$　(B)$\dfrac{1}{5}\leq\dfrac{1}{x}\leq 1$　(C)$1\leq y\leq 5$　(D)$xy\geq 10$

解　(A)因為｜$x-3$｜$\leq 2\Rightarrow -2\leq x-3\leq 2\Rightarrow 1\leq x\leq 5$

(B)由(A)知，$\dfrac{1}{5}\leq\dfrac{1}{x}\leq 1$

(C)因為 $x+y=6\Rightarrow y=6-x$，由(A)，故 $1\leq y\leq 5$

(D)由算幾不等式知　$\dfrac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}\Rightarrow 3\geq\sqrt{xy}\Rightarrow xy\leq 9$

故選(D)

二、多選題（每題 8 分，錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，其餘不給分，共 8 分）

（(B)(C)）4.下列哪些選項正確？

(A)$0.3\overline{6}=\frac{2}{5}$

(B)若 x 為正實數，則 $x+\frac{4}{x}\geq 4$

(C)$\sqrt{5}+\sqrt{3}>\sqrt{6}+\sqrt{2}$

(D)a，b 為實數，若 $a+b\sqrt{2}=\sqrt{2}$，則 $a=0$，$b=1$

(E)a，b 為實數，若 $0<a<1$ 且 $0<b<1$，則 $0<\frac{a}{b}<1$

解　(A)×：$0.3\overline{6}=\frac{36-3}{90}=\frac{33}{90}=\frac{11}{30}$

(B)○：由算幾不等式知 $x+\frac{4}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$

(C)○：因為 $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2=8+2\sqrt{3\cdot 5}>8+2\sqrt{2\cdot 6}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$

(D)×：考慮 $\sqrt{2}+0\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}$，即 $a=\sqrt{2}$，$b=0$ 為一反例

(E)×：考慮 $a=0.5$，$b=0.01$，則 $\frac{a}{b}=50$，即為一反例

故選(B)(C)

三、填充題（每格 8 分，共 80 分）

5.試將$\frac{27}{9999}$化為循環小數為__$0.\overline{0027}$__。

解　$0.\overline{0027}$

6.$\sqrt{24}+\sqrt{3}(\sqrt{12}-\sqrt{18})=a+b\sqrt{6}$，其中 a，b 為有理數，則數對(a, b)=__$(6, -1)$__。

解　$\sqrt{24}=\sqrt{2^3\times 3}=2\sqrt{6}$

$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，$\sqrt{18}=\sqrt{3\times 3\times 2}=3\sqrt{2}$

故 $\sqrt{24}+\sqrt{3}(\sqrt{12}-\sqrt{18})=2\sqrt{6}+\sqrt{3}(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})=2\sqrt{6}+6-3\sqrt{6}=6-\sqrt{6}$

故數對 $(a, b)=(6, -1)$

7.已知 $a+b=4$，$ab=2$。試求：

(1)$a^2+b^2=$__12__。(2)$a^3+b^3=$__40__。

解　(1) $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ ⇨ $16=a^2+b^2+4$ ⇨ $a^2+b^2=12$

(2)$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)=4(12-2)=40$

8.請問$\sqrt{14}$比較接近$\sqrt{13}$與$\sqrt{15}$的哪一個數？答：$\underline{\quad\sqrt{15}\quad}$。

解　$(\sqrt{14}-\sqrt{13})\times\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{13}}{\sqrt{14}+\sqrt{13}}=\dfrac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{13}}$

$(\sqrt{15}-\sqrt{14})\times\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{14}}{\sqrt{15}+\sqrt{14}}=\dfrac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{14}}$

$\sqrt{15}+\sqrt{14}>\sqrt{14}+\sqrt{13}$

故$\dfrac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{14}}<\dfrac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{13}}$

因此$\sqrt{15}-\sqrt{14}<\sqrt{14}-\sqrt{13}$，故$\sqrt{15}$比較接近$\sqrt{14}$

9.設實數 x，y 滿足 $x+2y=3$，$x^3+8y^3=9$，則 $x^2+4y^2=$$\underline{\quad 5\quad}$。

解　$\because (x+2y)^2=x^2+(2y)^2+2\cdot x\cdot 2y$

$\therefore x^2+4y^2=9-4xy$

$x^3+8y^3=x^3+(2y)^3=(x+2y)(x^2+4y^2-x\cdot 2y)$

$\Rightarrow 9=3\cdot(9-4xy-2xy)\Rightarrow 9-6xy=3\Rightarrow xy=1$

因此，$x^2+4y^2=9-4xy=9-4=5$

10.已知 $9999=9\times11\times101$，若將$\dfrac{7}{101}$化為循環小數，試求小數點後第 5566 位為$\underline{\quad 6\quad}$。

解　$\dfrac{7}{101}=\dfrac{7\times9\times11}{9\times11\times101}=\dfrac{693}{9999}=0.\overline{0693}$

$$\begin{array}{r}
1391\\
4\,\overline{)\,5566}\\
\underline{4}\\
15\\
\underline{12}\\
36\\
\underline{36}\\
6\\
\underline{4}\\
2
\end{array}$$

$5566=1391\times4+2$　　故小數點後第 5566 位為 6

11.若 $\sqrt{14-4\sqrt{10}}$ 整數部分為 a，小數部分為 b，則 $\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{b+5}=$ $\underline{\dfrac{2}{3}}$

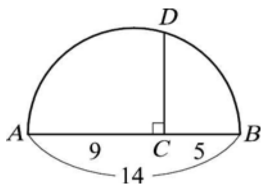
解　$\sqrt{14-4\sqrt{10}}=\sqrt{14-2\sqrt{40}}=\sqrt{10+4-2\sqrt{4\cdot 10}}=\sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{4})^2}=\sqrt{10}-2$

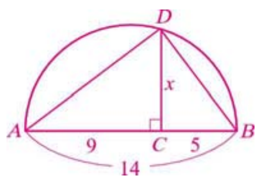
因為 $3<\sqrt{10}<4$，所以 $1<\sqrt{10}-2<2$　故 $a=1$，$b=\sqrt{10}-2-1=\sqrt{10}-3$

$$\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+5}=\frac{1}{\sqrt{10}-2}-\frac{1}{\sqrt{10}+2}$$

$$=\frac{\sqrt{10}+2}{(\sqrt{10}-2)(\sqrt{10}+2)}-\frac{10-2}{(\sqrt{10}-2)(\sqrt{10}+2)}=\frac{4}{10-4}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

12.如下圖，已知 $\overline{AB}=14$，在 $\overline{AB}$ 上取一點 C 使 $\overline{AC}=9$，又過 C 點作 $\overline{AB}$ 的垂直線與以 $\overline{AB}$ 為直徑的半圓交於 D 點，則 $\overline{CD}=$ $\underline{3\sqrt{5}}$ 。





解　$\overline{AC}=9$，$\overline{BC}=5$　設 $\overline{CD}=x$

由 $\triangle ACD\sim\triangle DCB$　故 $\dfrac{x}{9}=\dfrac{5}{x}$　　得 $x^2=45$，故 $x=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

13.小璿在某次作業的計算中，因精神不濟，將一正數「乘以 $0.\overline{4}$」，誤計算為「乘以 0.4」，導致所得結果相差 3，則此正數應為 $\underline{\dfrac{135}{2}}$ 。

解　若此正數為 a，則依題意

$$a\times 0.\overline{4}-a\times 0.4=3\Rightarrow a\left(\frac{4}{9}-\frac{4}{10}\right)=3\Rightarrow a\cdot\frac{4}{90}=3 \text{ 得 } a=\frac{90}{4}\times 3=\frac{135}{2}$$