高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：103.04.07					
範圍	2-2(A)直線排列	班級	一年____班	姓名	
		座號			

1.以 5 除 47^{76} 所得的餘數為____________．

解答　1

解析　$47^{76}=(45+2)^{76}=5\cdot q_1+2^{76}=5\cdot q_1+(2^6)^{12}\cdot 16=5\cdot q_1+(65-1)^{12}\cdot 16$

$=5\cdot q_2+16=5\cdot q_3+1$，其中 q_1，q_2，q_3 為正整數，$\therefore$餘數為 1．

2.設 x^{100} 除以$(x-1)^3$ 所得的餘式為 ax^2+bx+c，求 $a=$____________．

解答　4950

解析　$x^{100}=[1+(x-1)]^{100}=1+C_1^{100}(x-1)+C_2^{100}(x-1)^2+C_3^{100}(x-1)^3+\cdots+C_{100}^{100}(x-1)^{100}$，

除以$(x-1)^3$ 的餘式為 $1+100(x-1)+4950(x-1)^2=ax^2+bx+c$，$\therefore a=4950$．

3.(1)將 $(x+\dfrac{3}{x^2})^7$ 展開，試求 x 項的係數為____________．

(2)將 $(x-\dfrac{1}{2x^2})^9$ 展開，試求 x^3 項的係數為____________．

(3)將 $(x-\dfrac{1}{3x^2})^{18}$ 展開，試求 x^6 項的係數為____________．

解答　(1)189;(2)9;(3)$\dfrac{340}{9}$

解析　(1)設第 $r+1$ 項為 x 項，　則 $C_r^7x^{7-r}(\dfrac{3}{x^2})^r=C_r^7 3^r x^{7-r}x^{-2r}\Rightarrow 7-3r=1\Rightarrow r=2$，

$\therefore x$ 項的係數為 $C_2^7 3^2=189$．

(2)設第 $r+1$ 項為 x^3 項，　則 $C_r^9x^{9-r}(-\dfrac{1}{2x^2})^r=C_r^9(-\dfrac{1}{2})^r x^{9-r}x^{-2r}\Rightarrow 9-3r=3\Rightarrow r=2$，

$\therefore x^3$ 項的係數為 $C_2^9(-\dfrac{1}{2})^2=9$．

(3)設第 $r+1$ 項為 x^6 項，　則 $C_r^{18}x^{18-r}(-\dfrac{1}{3x^2})^r=C_r^{18}(-\dfrac{1}{3})^r x^{18-r}x^{-2r}\Rightarrow 18-3r=6\Rightarrow r=4$，

$\therefore x^6$ 項的係數為 $C_4^{18}(-\dfrac{1}{3})^4=\dfrac{340}{9}$．

4.$(ax^2+\dfrac{1}{x})^5$ 展開式中，x^4 項的係數為 270，則 $a=$____________．

解答　3

解析　$C_2^5(ax^2)^3(\dfrac{1}{x})^2=C_2^5a^3x^4=10a^3x^4$，$\therefore 10a^3=270\Rightarrow a=3$．

5.計算$(1.02)^{10}$ 到小數第三位（第四位之後四捨五入），其近似值為____________．

解答　1.219

解析　$(1+0.02)^{10}=1+C_1^{10}(0.02)+C_2^{10}(0.02)^2+C_3^{10}(0.02)^3+\cdots+C_{10}^{10}(0.02)^{10}$

$=1+0.2+0.018+0.00096+\cdots\approx 1.219$．

6.3^{50} 乘開後末三位的數字為____________．

解答　249

解析　$3^{50}=(3^2)^{25}=(10-1)^{25}$

$=C_0^{25}10^{25}+C_1^{25}(10)^{24}(-1)^1+\cdots+C_{22}^{25}10^3(-1)^{22}+C_{23}^{25}10^2(-1)^{23}+C_{24}^{25}10^1(-1)^{24}$

$+C_{25}^{25}(-1)^{25}$

$=1000t+25\times10-1=1000t+249$，$t$ 為正整數，

$\therefore$末三位數字為 249．

7.$1+(1+x^2)+(1+x^2)^2+(1+x^2)^3+\cdots+(1+x^2)^{50}$ 除以 x^3 的餘式為____________．

解答　$51+1275x^2$

解析　原式 $=\dfrac{1\times[(1+x^2)^{51}-1]}{(1+x^2)-1}=\dfrac{(1+x^2)^{51}-1}{x^2}$，

又 $(1+x^2)^{51}=C_0^{51}+C_1^{51}(x^2)^1+C_2^{51}(x^2)^2+C_3^{51}(x^2)^3+\cdots+C_{51}^{51}(x^2)^{51}$

$=1+51x^2+1275x^4+x^6\cdot f(x)$

$\Rightarrow\dfrac{(1+x^2)^{51}-1}{x^2}=\dfrac{51x^2+1275x^4+x^6\cdot f(x)}{x^2}=51+1275x^2+x^4\cdot f(x)$，

$\therefore$所求為 $51+1275x^2$．

8.求 $(1+x^3)+(1+x^3)^2+\cdots+(1+x^3)^{20}$ 展開式中 x^{12} 項係數為____________．

解答　20349

解析　$(1+x^3)+(1+x^3)^2+\cdots+(1+x^3)^{20}=\dfrac{(1+x^3)\left[(1+x^3)^{20}-1\right]}{(1+x^3)-1}=\dfrac{(1+x^3)^{21}-(1+x^3)}{x^3}$，

所求即分子 $(1+x^3)^{21}$ 展開式中 x^{15} 項係數，$\therefore$所求為 $C_5^{21}=\dfrac{21\times20\times19\times18\times17}{5\times4\times3\times2\times1}=20349$．

9.求 $(2x-y^2)^6$ 展開式中 x^4y^4 之係數為____________．

解答　240

解析　$C_2^6(2x)^4(-y^2)^2=C_2^6\cdot2^4\cdot(-1)^2\cdot x^4y^4=240x^4y^4$　　$\therefore x^4y^4$ 之係數為 240．

10.$(a+b)^{12}$ 的展開式中 a^3b^9 的係數為____________．

解答　220

解析　$C_9^{12}a^3b^9=C_3^{12}a^3b^9=220a^3b^9$　　$\therefore a^3b^9$ 項的係數為 220．

11.$a\in\mathbb{R}$，將 $(\dfrac{a}{x^2}-\sqrt{3}x)^6$ 展開後常數項為 270，求 $a=$____________．

解答　$\pm\sqrt{2}$

解析　設第 $r+1$ 項為常數項，則 $C_r^6(\dfrac{a}{x^2})^{6-r}\cdot(-\sqrt{3}x)^r=C_r^6a^{6-r}\cdot(-\sqrt{3})^r\cdot x^{-12+2r}\cdot x^r$，

表示 $-12+3r=0\Rightarrow r=4$，常數項為 $C_4^6a^2(-\sqrt{3})^4=270\Rightarrow a=\pm\sqrt{2}$．

12.已知 $2000<C_1^n+C_2^n+\cdots+C_n^n<3000$，求 $n=$____________．

解答　11

解析　$2000<C_1^n+C_2^n+\cdots+C_n^n<3000$

$\Rightarrow2000<2^n-1<3000\Rightarrow2001<2^n<3001$

$\therefore n=11$．