

高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：102.10.31				
範圍	2.2 多項式運算	班級	一年__班	姓名
		座號		

一、填充題：(每題10分)

1. 設 $f(x) = (-x^3 + x + 2)^9$ (1) $f(x)$ 的常數項為_____。 (2) $f(x)$ 的各項係數和為_____。

解答 (1) 512; (2) 512

2. 多項式 $f(x)$ 滿足 $8f(x) - 5x^6 f(x^3) - 2f(x^2) + 18 = 0$ ，則 $f(x)$ 的常數項為_____。

解答 -3

解析 $f(x)$ 的常數項為 $f(0)$

$$\text{由 } 8f(x) - 5x^6 f(x^3) - 2f(x^2) + 18 = 0, \text{ 令 } x = 0$$

$$\therefore 8f(0) - 0 - 2f(0) + 18 = 0 \quad \therefore f(0) = -3$$

3. 已知 $f(x) = ax^9 + bx^7 + cx^3 - 6$ ，若 $f(x)$ 除以 $x+5$ 時，餘式為 2，則 $f(x)$ 除以 $x-5$ 時，其餘式為_____。

解答 -14

解析 $\because f(x)$ 除以 $x+5$ 的餘式為 2, $\therefore f(-5) = 2 \Rightarrow a(-5)^9 + b(-5)^7 + c(-5)^3 - 6 = 2$

$$\Rightarrow -a \times 5^9 - b \times 5^7 - c \times 5^3 = 8 \Rightarrow a \times 5^9 + b \times 5^7 + c \times 5^3 = -8, \therefore f(x) \text{ 除以 } x-5 \text{ 的餘式為}$$

$$f(5) = a \times 5^9 + b \times 5^7 + c \times 5^3 - 6 = -8 - 6 = -14.$$

4. 求多項式 $x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 3x + 18$ 除以 $x^2 + x + 2$ 的 (1) 商 = _____ (2) 餘式 = _____。

解答 (1) $x^2 - 3x + 9$; (2) 0

$$\begin{array}{r} 1-3+9 \\ 1+1+2 \overline{) 1-2+8+3+18} \\ \underline{1+1+2} \\ -3+6+3 \\ \underline{-3-3-6} \\ 9+9+18 \\ \underline{9+9+18} \\ 0 \end{array}$$

解析 商為 $x^2 - 3x + 9$ ，餘式 0

5. (1) 若 $8^6 - 66 \times 8^4 + 20 \times 8^3 - 30 \times 8^2 + a \times 8 - 88 = 0$ ，則 $a =$ _____。

(2) 計算 $4\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^4 - 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^3 + 3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) + 1$ 之值為_____。

解答 (1) -5; (2) $\frac{9}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$;

解析 (1) 令 $f(x) = x^6 - 66x^4 + 20x^3 - 30x^2 + ax - 88$

$$\text{則 } f(8) = 0 = 40 + 8a \Rightarrow a = -5.$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad -66 \quad +20 \quad -30 \quad +a \quad -88 \\ \quad +8 \quad +64 \quad -16 \quad +32 \quad +16 \quad +(128+8a) \\ \hline 1 \quad 8 \quad -2 \quad +4 \quad +2 \quad +(16+a) \quad | \quad 40+8a \end{array}$$

(2) 令 $g(x) = 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1$,

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow (4x-1)^2 = 5 \Rightarrow 4x^2 - 2x - 1 = 0,$$

為_____。

解答 $x + 11$

解析 已知 $f(11) = 22$, $f(-22) = -11$, 設 $f(x) = (x - 11)(x + 22)Q(x) + [a(x - 11) + 22]$

又 $f(-22) = -33a + 22 = -11 \Rightarrow a = 1$, 故餘式為 $a(x - 11) + 22 = (x - 11) + 22 = x + 11$

10. 設多項式 $f(x)$ 除以 $x - 1$, $x^2 - 2x + 3$ 之餘式依次為 2 , $4x + 6$, 則 $f(x)$ 除以 $(x - 1)(x^2 - 2x + 3)$ 的餘式為_____。

解答 $-4x^2 + 12x - 6$

解析 $f(x) = (x - 1)(x^2 - 2x + 3)h(x) + a(x^2 - 2x + 3) + 4x + 6$

$f(1) = 2a + 10 = 2 \Rightarrow a = -4 \therefore$ 餘式為 $-4x^2 + 12x - 6$

11. 設 n 次多項式 $f(x)$ 分別除以 $(x + 1)$, $(x - 1)$, $(x - 3)$ 的餘式依次是 -7 , 5 , 9 . 試求 $f(x)$ 除以 $(x + 1)(x - 1)(x - 3)$ 之餘式為_____。

解答 $-x^2 + 6x$

解析 設 $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 3)q(x) + a(x + 1)(x - 1) + b(x + 1) - 7$,

$\therefore f(1) = 2b - 7 = 5 \Rightarrow b = 6$, 又 $f(3) = 8a + 4b - 7 = 9 \Rightarrow a = -1$,

\therefore 所求餘式為 $-(x + 1)(x - 1) + 6(x + 1) - 7 = -x^2 + 6x$.

12. 設 $\deg f(x) \geq 3$, 若多項式 $f(x)$ 除以 $x - 1$ 的餘式為 7 , 除以 $x^2 + x + 1$ 的餘式為 $2x - 1$, 試求 $f(x)$ 除以 $x^3 - 1$ 的餘式_____。

解答 $2x^2 + 4x + 1$

解析 設 $f(x) = (x^3 - 1) \cdot Q(x) + a(x^2 + x + 1) + 2x - 1$,

$f(1) = a(3) + 2 - 1 = 7 \Rightarrow a = 2$,

$f(x) \div (x^3 - 1)$ 的餘式為 $2(x^2 + x + 1) + 2x - 1 = 2x^2 + 4x + 1$.

13. 設 $x^2 - x + 2$ 除 $x^4 - x^3 + x^2 + ax + 3$ 的餘式為 $2x + b$, $a, b \in \mathbf{R}$, 則數對 $(a, b) =$ _____。

解答 $(3, 5)$

解析 $\therefore x^2 - x + 2$ 除 $x^4 - x^3 + x^2 + ax + 3$ 的餘式為 $2x + b$

$\therefore x^2 - x + 2 \mid (x^4 - x^3 + x^2 + ax + 3) - (2x + b) = x^4 - x^3 + x^2 + (a - 2)x + (3 - b)$

$$\begin{array}{r}
 1 + 0 - 1 \\
 1 - 1 + 2 \overline{) 1 - 1 + 1 + (a - 2)x + (3 - b)} \\
 \underline{1 - 1 + 2} \\
 - 1 + (a - 2)x + (3 - b) \\
 - 1 + \quad 1 \quad - \quad 2 \\
 \hline
 (a - 3) + (5 - b)
 \end{array}$$

$\therefore a - 3 = 0$ 且 $5 - b = 0 \therefore a = 3, b = 5$

14. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 8x + a$, $g(x) = x^2 - 4x + b$, 已知 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的倍式, 則

(1) $a =$ _____ . (2) $b =$ _____ .

解答 (1) 6; (2) 2

解析 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 8x + a$ 是 $g(x) = x^2 - 4x + b$ 的倍式, 即 $g(x)$ 整除 $f(x)$, 用綜合除法

$$\begin{array}{r}
 2 - 5 \quad - \quad 8 \quad + \quad a \\
 \quad \nearrow 8 \quad \quad \\
 \quad \quad + \quad 12 \quad \\
 \hline
 2 + 3 \quad , \quad 4 - 2b \quad a - 3b \quad - b
 \end{array}$$

餘式為 0，故 $4 - 2b = 0$ ， $a - 3b = 0$ 得 $b = 2$ ， $a = 6$

15. 設 $f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 2x + 1 = a(x+2)^5 + b(x+2)^4 + c(x+2)^3 + d(x+2)^2 + e(x+2) + f$ ，

(1) 求序組 $(a, b, c, d, e, f) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 求 $f(-1.99)$ 之近似值至小數點以下第三位 (第四位四捨五入) 得 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解答 (1) $(1, -7, 14, 4, -38, 29)$; (2) 28.620

解析

$$\begin{array}{r}
 -2 \mid 1 + 3 - 2 + 0 + 2 + 1 \\
 \quad 1 - 2 - 2 + 8 - 16 + 28 \\
 \hline
 \quad 1 + 1 - 4 + 8 - 14 + 29 \\
 \quad 1 - 2 + 2 + 4 - 24 \\
 \hline
 \quad 1 - 1 - 2 + 12 - 38 \\
 \quad 1 - 2 + 6 - 8 \\
 \hline
 \quad 1 - 3 + 4 + 4 \\
 \quad 1 - 2 + 10 \\
 \hline
 \quad 1 - 5 + 14 \\
 \quad 1 - 2 \\
 \hline
 \quad 1 - 7
 \end{array}$$

$$\text{原式} = (x+2)^5 - 7(x+2)^4 + 14(x+2)^3 + 4(x+2)^2 - 38(x+2) + 29$$

$$\begin{aligned}
 f(-1.99) &= (0.01)^5 - 7(0.01)^4 + 14(0.01)^3 + 4(0.01)^2 - 38(0.01) + 29 \\
 &= 29 - 0.38 + 0.0004 + \dots \approx 28.620
 \end{aligned}$$

16. 設 $x^4 = (x+k)(x-1)(x+2)(x-2) + a(x-1)(x+2) + b(x-1) + c$ ，則 $a + b + c + k = \underline{\hspace{2cm}}$.

解答 2

解析 令 $x = 1 \Rightarrow 1 = c$; $x = -2 \Rightarrow 16 = -3b + 1 \therefore b = -5$

$$x = 2 \Rightarrow 16 = 4a - 5 + 1 \therefore a = 5; x = 0 \Rightarrow 0 = 4k - 10 + 5 + 1 \therefore k = 1$$

$$\text{則 } a + b + c + k = 2$$

17. 設 $f(x) = (x^2 - x + 1)q(x) + 2x - 5$ ，且 $f(x)$ 之各項係數和為 2，則 $q(x)$ 除以 $x - 1$ 之餘式為 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解答 5

解析 $f(x) = (x^2 - x + 1)q(x) + 2x - 5$

$$f(x)\text{之各項係數和為 } 2 \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow q(1) + 2 - 5 = 2 \Rightarrow q(1) = 5$$

故 $q(x)$ 除以 $x - 1$ 之餘式為 $q(1) = 5$

18. 用 $x - 1$ 除 $(x - 2)^{2003} + 2003$ 所得的餘式為 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解答 2002

解析 令 $f(x) = (x - 2)^{2003} + 2003$ 由餘式定理 \Rightarrow 餘式 $r = f(1) = (1 - 2)^{2003} + 2003 = 2002$

19. 若多項式 $f(x) = 8x^3 + ax^2 + bx + 5$ 被 $2x^2 + x - 1$ 除的餘式為 $4x + 1$ ，則

(1) $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) $f(x)$ 被 $2x - 1$ 除的餘式為 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 改寫 $f(x) = a(2x - 1)^3 + b(2x - 1)^2 + c(2x - 1) + d$ ，則序對 $(a, b, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) $f(0.48)$ 的近似值為 $\underline{\hspace{2cm}}$. (以四捨五入法取至小數點後第三位)

解答 (1) -8 ; (2) 3 ; (3) $(1, 2, -1, 3)$; (4) 3.043

解析 (1)

$$\begin{array}{r}
 2+1-1 \overline{) 8 \quad +a \quad +b+5} \\
 \underline{8 \quad +4 \quad -4} \\
 (a-4) + (b+4) + 5 \\
 \underline{-8 \quad -4+4} \\
 (a+4) + (b+8) + 1
 \end{array}$$

$$\text{由 } r(x) = 4x + 1 \Rightarrow \begin{cases} a + 4 = 0 \\ b + 8 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -4 \end{cases} \text{ 故 } a + b = -8$$

$$(2) f(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 5, \text{ 餘式 } r = f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \text{ (如下綜合除法之餘式)}$$

$$\begin{array}{r}
 8 - 4 - 4 + 5 \left| \frac{1}{2} \right. \\
 + 4 + 0 - 2 \\
 \hline
 8 + 0 - 4 + 3
 \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{r}
 8 - 4 - 4 + 5 \left| \frac{1}{2} \right. \\
 + 4 + 0 - 2 \\
 \hline
 2 \overline{) 8 + 0 - 4 + 3} \rightarrow d \\
 \underline{4 + 0 - 2} \\
 + 2 + 1 \\
 \hline
 2 \overline{) 4 + 2 - 1} \rightarrow c \\
 \underline{2 + 1} \\
 + 1 \\
 \hline
 2 \overline{) 2 + 2} \rightarrow b \\
 \underline{1} \rightarrow a
 \end{array}$$

由上綜合除法之計算，序對 $(a, b, c, d) = (1, 2, -1, 3)$

$$(4) \text{由(3)} \Rightarrow f(x) = 3 - (2x - 1) + 2(2x - 1)^2 + (2x - 1)^3$$

$$\text{則 } f(0.48) = 3 - (-0.04) + 2 \times (0.0016) + \dots \doteq 3.043$$

20. 三次多項式 $f(x)$ ，若 $f(-1) = f(1) = f(2) = 0$ ，且滿足 $f(5) = -72$ ，求 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解答 $-(x-1)(x+1)(x-2)$

解析 設 $f(x) = a(x-1)(x+1)(x-2)$ ， $f(5) = a \times 4 \times 6 \times 3 = -72$ ， $a = -1$

$$\therefore f(x) = -(x-1)(x+1)(x-2)$$

21. 設 $f(x)$ 為三次多項式，滿足 $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ ， $f(3) = 6$ ，求

(1) $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$. (2) $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解答 (1) $x(x-1)(x-2)$; (2) -6

解析 (1) $\because f(0) = f(1) = f(2) = 0 \Rightarrow f(x)$ 含有 x ， $x-1$ ， $x-2$ 之因式

$$\therefore \text{設 } f(x) = ax(x-1)(x-2)$$

$$\text{又 } \because f(3) = 6 \Rightarrow a \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \quad \therefore a = 1 \quad \therefore f(x) = x(x-1)(x-2)$$

$$(2) f(x) \text{ 除以 } x+1 \text{ 的餘式為 } f(-1) = -1 \times (-2) \times (-3) = -6$$