高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：102.10.03					
範圍	1-1.2 數與數線(B)	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、單選題：

1. (　　　　) 設a，b是不為0的有理數，試問下列何者必為無理數？
   (1) a^2+2b　(2) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$　(3) $\sqrt{ab}$　(4) $a+b\sqrt{2}$

解答　4

解析　(1) a^2，$2b$ 都是有理數，a^2+2b 必是有理數．
(2) a，b是完全平方數時，$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$ 是有理數，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 未必是無理數．
(3) ab是完全平方數時，$\sqrt{ab}$ 是有理數．
(4)因 $b\neq 0$，知 $b\sqrt{2}$ 是無理數，得 $a+b\sqrt{2}$ 是無理數．

2. (　　　　)試問最接近 $\sqrt{2010+\sqrt{2010}}$ 的整數是多少？　(1) 43　(2) 44　(3) 45　(4) 46　(5) 47

解答　3

解析　$\because 44\times 44=1936,\ 45\times 45=2025$，$\therefore 44<\sqrt{2010}<45$

$\Rightarrow \sqrt{2010+44}<\sqrt{2010+\sqrt{2010}}<\sqrt{2010+45}\Rightarrow \sqrt{2054}<\sqrt{2010+\sqrt{2010}}<\sqrt{2055}$，

又 $45.5\times 45.5=2070.25$，$\therefore 45<\sqrt{2010+\sqrt{2010}}<45.5$，即最接近 $\sqrt{2010+\sqrt{2010}}$ 的整數為 45．

3. (　　　　) 設x是實數且滿足$|x-6|=2|x|$，試問x值可為：　(1) -6　(2) -2　(3) 0　(4) 6

解答　1

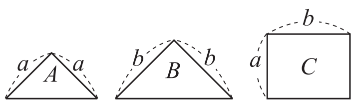
解析　(1) $x=-6$ 時，$12=12$．(2) $x=-2$ 時，$8\neq 4$．(3) $x=0$ 時，$6\neq 0$．(4) $x=6$ 時，$0\neq 12$．

4. (　　　　) 下列各數中何者最大？　(1) $\frac{8}{25}$　(2) 0.324　(3) $0.32\overline{4}$　(4) $0.3\overline{24}$　(5) $0.\overline{324}$

解答　3

解析　(1) $\frac{8}{25}=0.32$．
(3) $0.32\overline{4}=0.32444\cdots$．(4) $0.3\overline{24}=0.32424\cdots$．(5) $0.\overline{324}=0.324324\cdots$．

5. (　　　　) 如附圖，有 A，B 兩個等腰直角三角形與長方形C，已知 A，B，C 三個圖形可以拼成一個大的等腰直角三角形，則所拼成的大等腰直角三角形面積為何？



(1) $(a+b)^2$　(2) $(b-a)^2$　(3) a^2+b^2　(4) $\frac{1}{2}(a+b)^2$　(5) $\frac{1}{2}(b-a)^2$

解答　4

解析　大等腰直角三角形面積為A，B，C面積的和，

即$\dfrac{1}{2}a\times a+\dfrac{1}{2}b\times b+a\times b=\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{2}b^2+ab=\dfrac{1}{2}(a^2+2ab+b^2)=\dfrac{1}{2}(a+b)^2$.

6.（　　　　）試問滿足$|-3.\bar{3}|<|a+\dfrac{1}{2}|<10$的整數$a$共有多少個？

(1) 10個　(2) 11個　(3) 12個　(4) 13個　(5) 14個

解答　5

解析　原式$\Rightarrow 3.\bar{3}<a+\dfrac{1}{2}<10$或$-10<a+\dfrac{1}{2}<-3.\bar{3}\Rightarrow 3\dfrac{1}{3}<a+\dfrac{1}{2}<10$或$-10<a+\dfrac{1}{2}<-3\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow 2\dfrac{5}{6}<a<9\dfrac{1}{2}$或$-10\dfrac{1}{2}<a<-3\dfrac{5}{6}$，又$a$為整數，$\therefore a=3$，4，5，…，9，$-10$，$-9$，…，$-4$，

共14個．

二、填充題：

1. 設$f(x)=|x-3|+|x-4|$，試求：

(1) $f(x)$的最小值為__________，此時x的範圍為__________．

(2)若$f(x)<k$有解，則實數k的範圍為__________

解答　(1)1，$3\le x\le 4$;

(2)$k>1$

解析　(1) $f(x)=|x-3|+|x-4|\ge|(x-3)-(x-4)|=1$，$\therefore f(x)$的最小值為1，

且當等號成立時，$(x-3)(x-4)\le 0$，即$3\le x\le 4$ ．

(2)$\because f(x)=|x-3|+|x-4|$之最小值為1，∴若$|x-3|+|x-4|<k$有解，則$k>1$ ．

2. 試求下列各式的值：

(1) 1.321 + 3.56 + 5.679 = ________ ．　　(2) $\dfrac{27}{7}\times 1.6-\dfrac{18}{7}\times 1.6+\dfrac{34}{7}\times 3.2=$________ ．

(3) $\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)-3(\sqrt{2}+1)+2\sqrt{2}=$________ ．　(4) $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)+(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=$________

解答　(1)10.56;(2)17.6;(3)-1;(4)6

解析　(1)原式= (1.321 + 5.679) + 3.56 = 7 + 3.56 = 10.56．

(2)原式$=(\dfrac{27}{7}-\dfrac{18}{7}+\dfrac{34}{7}\times 2)\times 1.6=\dfrac{77}{7}\times 1.6=11\times 1.6=17.6$ ．

(3)原式$=2+\sqrt{2}-3\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}=-1$ ．

(4)原式$=(\sqrt{5})^2-1^2+(\sqrt{3})^2-1^2=5-1+3-1=6$ ．

3. 設a，b為實數，若$|ax+3|\ge b$的解為$x\le 2$或$x\ge 6$，試求數對$(a,\ b)=$__________

解答　$(-\dfrac{3}{4},\ \dfrac{3}{2})$

解析　$\because x\le 2$或$x\ge 6\Rightarrow |x-\dfrac{6+2}{2}|\ge\dfrac{6-2}{2}\Rightarrow|x-4|\ge 2\Rightarrow|-\dfrac{4}{3}(-\dfrac{3}{4}x+3)|\ge 2$

$\Rightarrow\dfrac{4}{3}|-\dfrac{3}{4}x+3|\ge 2\Rightarrow|-\dfrac{3}{4}x+3|\ge\dfrac{3}{2}$，$\therefore a=-\dfrac{3}{4},\ b=\dfrac{3}{2}$，故數對$(a,\ b)=(-\dfrac{3}{4},\ \dfrac{3}{2})$ ．

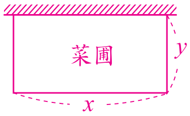
4. 12.茂伯想利用20公尺長的鐵絲網在屋後的空地上圍出一塊矩形的菜圃，若將菜圃靠在屋後，則只須圍三邊，試問此菜圃最大面積為________平方公尺，又最大面積發生時，長邊為________

公尺，短邊為________公尺

解答　50，10，5

解析　設所圍菜圃的長邊為x公尺，短邊為y公尺，則 $x+2y=20$，又欲求所圍菜圃的最大面積，

即求xy的最大值，利用算幾不等式得 $\dfrac{x+2y}{2}\geq\sqrt{2xy}\Rightarrow 10\geq\sqrt{2xy}\Rightarrow xy\leq 50$，$\therefore$所圍菜圃的最大面積為50平方公尺，此時 $x=2y=10$，即長邊為10公尺，短邊為5公尺．

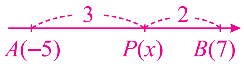


5. 數線上二定點 $A(-5)$, $B(7)$，又 $P(x)$ 為數線上一點且 $\overline{PA}:\overline{PB}=3:2$，試求：

(1)若 P 點介於 A，B 之間，則 $x=$____________．(2)若 P 點不介於 A，B 之間，則 $x=$____________

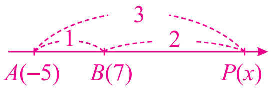
解答　(1)$\dfrac{11}{5}$;(2)31

解析　(1)若P點介於A，B之間且 $\overline{PA}:\overline{PB}=3:2$，



則 $x=\dfrac{2\times(-5)+3\times 7}{3+2}=\dfrac{11}{5}$．

(2)若P點不介於A，B之間且 $\overline{PA}:\overline{PB}=3:2$，



則 $\overline{AB}:\overline{BP}=1:2$，得 $7=\dfrac{2\times(-5)+1\times x}{1+2}\Rightarrow 21=x-10$，$\therefore x=31$．

6. 設x為實數且 $|x+1|+|x-3|=4$，則x的範圍為____________

解答　$-1\leq x\leq 3$

解析　決定 $|x+1|$，$|x-3|$正負的x有 -1，3．

(1) $x>3$時，$(x+1)+(x-3)=4$，得 $x=3$（不合）．

(2) $-1\leq x\leq 3$時，$(x+1)+(3-x)=4$恆成立，得 $-1\leq x\leq 3$．

(3) $x<-1$時，$-(x+1)+(3-x)=4$，得 $x=-1$（不合）．

由(1)(2)(3)知 $-1\leq x\leq 3$．

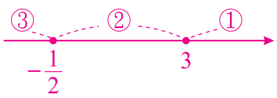
7. 試解下列各絕對值方程式：

(1) $|2x-1|=5$，$x=$____________．(2) $|2x+1|+|x-3|=5$，$x=$____________

解答　(1)3或−2;(2)1或−1

解析　(1) $|2x-1|=5\Rightarrow 2x-1=5$ 或 $2x-1=-5$，$\therefore x=3$ 或 -2．

(2)分別令 $|2x+1|=0$，$|x-3|=0$，得 $x=-\dfrac{1}{2}$ 及 $x=3$，將數線以 $x=-\dfrac{1}{2}$ 及3為界分三個區間，

圖示：

①當 $x\geq 3$，$2x+1>0$，$x-3\geq 0\Rightarrow(2x+1)+(x-3)=5\Rightarrow 3x=7$，$\therefore x=\dfrac{7}{3}$，但 $x\geq 3$（不合）．

②當 $-\dfrac{1}{2}\leq x<3$時，$2x+1\geq 0$，$x-3<0$，則原式$\Rightarrow(2x+1)-(x-3)=5\Rightarrow x=1$．

③當 $x<-\dfrac{1}{2}$ 時，$2x+1<0$，$x-3<0$，則原式 $\Rightarrow -(2x+1)-(x-3)=5\Rightarrow -3x=3$，

$\therefore x=-1$．由①②③得知 $x=1$ 或 -1．

8. 設 a，b，c 皆為整數，已知 $3|a-2|+4|b+1|+|c-3|=2$，試求 $a=$______，$b=$______，$c=$______

解答　2，-1，5或1

解析　$\because a$，b，c 皆為整數，$\therefore |a-2|$ 及 $|b+1|$ 均為大於等於0的整數，若 $|a-2|\neq 0$，則 $3|a-2|\geq 3$（不合），$\therefore a-2=0\Rightarrow a=2$，同理 $b+1=0\Rightarrow b=-1$，又 $|c-3|=2\Rightarrow c-3=\pm 2$，得 $c=5$ 或1，故 $a=2$，$b=-1$，$c=5$ 或1．

9. 數線上三點 $A(2)$，$B(-5)$ 與 $P(x)$，若：

(1)已知 $4\overline{AP}=3\overline{BP}$，求 $x=$__________．(2) P 點為 $\overline{AB}$ 的中點，求 $x=$__________

解答　(1) -1 或23;(2) $-\dfrac{3}{2}$

解析　(1) $\because 4\overline{AP}=3\overline{BP}\Rightarrow \overline{AP}:\overline{BP}=3:4$．

①內分點：若 $B-P-A$，則 $x=\dfrac{3\times(-5)+4\times 2}{3+4}=-1$．

②外分點：若 $B-A-P$，則 A 為 P，B 的內分點，且 $\overline{AB}:\overline{AP}=1:3$

$\Rightarrow 2=\dfrac{3\times(-5)+1\times x}{1+3}\Rightarrow 8=x-15$，　$\therefore x=23$．由①②得知 $x=-1$ 或23．

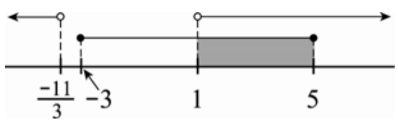
(2)若 P 為 $\overline{AB}$ 的中點，則 $x=\dfrac{2+(-5)}{2}=-\dfrac{3}{2}$．

10. 若實數 x 滿足 $|x-1|\leq 4$ 且 $|3x+4|>7$，則 x 的範圍為__________

解答　$1<x\leq 5$

解析　(1) $|x-1|\leq 4\Rightarrow -4\leq x-1\leq 4\Rightarrow -3\leq x\leq 5$．

(2) $|3x+4|>7\Rightarrow 3x+4>7$ 或 $3x+4<-7\Rightarrow x>1$ 或 $x<\dfrac{-11}{3}$．

由(1)(2)得  $1<x\leq 5$．

11. 設 a，b，c 均為整數，若 $|a-1|+2|b-2|+3\sqrt{c^2+2c+1}=2$，求數對 $(a,\ b,\ c)=$__________

解答　$(3,2,-1)$，$(-1,2,-1)$，$(1,3,-1)$ 或 $(1,1,-1)$

解析　原式 $\Rightarrow |a-1|+2|b-2|+3\sqrt{(c+1)^2}=2\Rightarrow |a-1|+2|b-2|+3|c+1|=2$，

$\because |c+1|$ 的係數 $3>2$，$\therefore |c+1|=0$，得 $c=-1$，

即 $|a-1|+2|b-2|=2$．

①當 $|b-2|=0$ 時，$b=2$，得 $|a-1|=2\Rightarrow a-1=\pm 2$，$\therefore x=3$ 或 -1．

②當 $|b-2|=1$ 時，$b-2=\pm 1\Rightarrow b=3$ 或1，得 $|a-1|=0$，$\therefore a=1$，得數對 $(a,\ b,\ c)=(1,\ 3,\ -1)$ 或 $(1,\ 1,\ -1)$．由①②得知，數對 $(a,\ b,\ c)=(3,\ 2,\ -1)$，$(-1,\ 2,\ -1)$，$(1,\ 3,\ -1)$ 或 $(1,\ 1,\ -1)$．

12. 設 $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，則 $a=$__________，$\dfrac{1}{b}=$__________

解答　$4;\sqrt{2}+1$

解析　$\sqrt{11+6\sqrt{2}}=\sqrt{11+2\sqrt{18}}=\sqrt{9}+\sqrt{2}=3+\sqrt{2}$，因為$1<\sqrt{2}<2$，

所以$a=4$，$b=3+\sqrt{2}-4=\sqrt{2}-1$，故$\frac{1}{b}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1$.

13. 設a，b皆為正數，若：

(1) $a+b=12$，則ab的最大值為__________，此時$a=$__________，$b=$__________ .

(2) $a+2b=12$，則ab的最大值為__________，此時$a=$__________，$b=$__________

解答　(1)36，6，6;(2)18，6，3

解析　(1)$\because \frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，$\therefore \frac{12}{2}\geq\sqrt{ab}$，即$ab\leq 36$，$\therefore ab$的最大值為36，此時$a=b=6$.

(2)$\frac{a+2b}{2}\geq\sqrt{2ab}$，$\therefore \frac{12}{2}\geq\sqrt{2ab}$，即$2ab\leq 36\Rightarrow ab\leq 18$，$\therefore ab$最大值18，此時$a=2b=6$，

即$a=6$，$b=3$.

14. 設a是實數，若滿足$5x+8<9x-a$的實數x之範圍是$x>3$，則$a=$__________

解答　4

解析　由$9x-5x>8+a$，得$4x>8+a$，即$x>\frac{8+a}{4}=3$，故$a=4$.

15. 設$0<a<1$，已知$x=a^2+1,\ y=2a$，試求$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=$__________

解答　2

解析　$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{a^2-2a+1}=\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a-1)^2}$

$=|a+1|+|a-1|=(a+1)-(a-1)=2$.

16. 設$-\frac{2}{7}<x<\frac{6}{7}$，化簡$\sqrt{(7x+2)^2}+\sqrt{(7x-6)^2}=$__________

解答　8

解析　當$-\frac{2}{7}<x<\frac{6}{7}$時，$-2<7x<6$，故$7x+2>0$且$7x-6<0$，

原式$=|7x+2|+|7x-6|=7x+2-(7x-6)=8$.

17. 設a，b皆為有理數且$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$均為無理數，已知$\sqrt{9+2\sqrt{a}}=\sqrt{6}+\sqrt{b}$，試求$a+b=$__________

解答　21

解析　$\sqrt{9+2\sqrt{a}}=\sqrt{6}+\sqrt{b}$，兩邊平方得$9+2\sqrt{a}=(6+b)+2\sqrt{6b}\Rightarrow\begin{cases}9=6+b\\a=6b\end{cases}$，

$\therefore a=18$，$b=3$，故$a+b=21$.

18. 試計算$(1-\frac{1}{2^2})\times(1-\frac{1}{3^2})\times(1-\frac{1}{4^2})\times\cdots\times(1-\frac{1}{10^2})$之值$=$__________

解答　$\frac{11}{20}$

解析　$(1-\frac{1}{2^2})\times(1-\frac{1}{3^2})\times(1-\frac{1}{4^2})\times\cdots\times(1-\frac{1}{10^2})=\frac{2^2-1}{2^2}\times\frac{3^2-1}{3^2}\times\frac{4^2-1}{4^2}\times\cdots\times\frac{10^2-1}{10^2}$

$=\frac{1\times\cancel{3}}{2^{\cancel{2}}}\times\frac{\cancel{2}\times\cancel{4}}{\cancel{3^2}}\times\frac{\cancel{3}\times\cancel{5}}{\cancel{4^2}}\times\cdots\times\frac{\cancel{9}\times11}{10^{\cancel{2}}}=\frac{1\times11}{2\times10}=\frac{11}{20}$.

19. 設 $x\neq-1$，0，1，試化簡：

(1) $\dfrac{x}{\frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1})}=$____________ .　　(2) $\dfrac{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}}=$____________

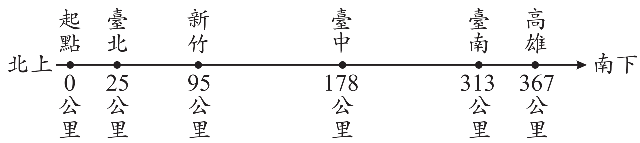
解答　(1) x^2-1;(2) $\frac{1}{2}(x^2-1)$

解析　(1)原式 $=\dfrac{2x}{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}=\dfrac{2x}{\frac{(x+1)+(x-1)}{(x-1)(x+1)}}=\dfrac{2x(x-1)(x+1)}{2x}=x^2-1$.

(2)原式 $=\dfrac{\frac{(x-1)+(x+1)}{(x+1)(x-1)}}{\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}}=\dfrac{\frac{2x}{(x+1)(x-1)}}{\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)^2}}=\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)}\times\dfrac{(x-1)^2(x+1)^2}{4x}$

$=\frac{1}{2}(x-1)(x+1)=\frac{1}{2}(x^2-1)$.

20. 下圖為中山高速公路部分路段及其對應公路里程數的示意圖，我們可以將它看成一直線，若文建正開車由臺中要到臺北，而他目前的位置到臺北的距離恰為離開臺中距離的2倍，請問文建現在的位置距離新竹還有____________公里．



解答　32

解析　設臺北、臺中的坐標位置分別為 $A(25)$， $B(178)$，而文建目前的位置為 $P(x)$，

$\because \overline{AP}:\overline{PB}=2:1$，$\therefore x=\frac{1\times25+2\times178}{2+1}=127$，

即文建目前在高速公路里程數127公里處，故距離新竹還有 $127-95=32$（公里）．