明誠高中____學年度_____學期　　　　　　　　　　數學平時考　　　　　　得分：

一年___班 座號_____　姓名：_____________

一、單選題：

(　　)1. $\sqrt{\frac{1}{5^2}+\frac{1}{4^2}+1}$等於下列哪一個選項？

(A) 1.01　(B) 1.05　(C) 1.1　(D) 1.15　(E) 1.21

答案：B

解析：$\sqrt{\frac{1}{5^2}+\frac{1}{4^2}+1}=\sqrt{\frac{4^2+5^2+5^2\cdot 4^2}{5^2\cdot 4^2}}=\sqrt{\frac{16+25+400}{400}}=\sqrt{\frac{441}{400}}=\frac{21}{20}=1.05$，故選(B)。

(　　)2. 將$\frac{3}{7}$化為循環小數，則小數點以下的第 2007 位數字為

(A) 2　(B) 4　(C) 5　(D) 7　(E) 8

答案：E

解析：$\frac{3}{7}=0.\overline{428571}$，而 $2007=6\times 334+3$　故小數點後第 2007 位數字為 8

(　　)3. 令 $a=\sqrt{5}$，$b=\sqrt[3]{11}$，$c=\sqrt[4]{21}$，則三數大小關係為何？

(A) $a>b>c$　(B) $b>c>a$　(C) $c>a>b$　(D) $a>c>b$　(E) $b>a>c$

答案：A

解析：$a=\sqrt{5}=\sqrt[12]{5^6}=\sqrt[12]{15625}$

$b=\sqrt[3]{11}=\sqrt[12]{11^4}=\sqrt[12]{14641}$

$c=\sqrt[4]{21}=\sqrt[12]{21^3}=\sqrt[12]{9261}$

$\therefore\ a>b>c$

(　　)4. 有一分數$\frac{315a21}{24}$化為小數時為有限小數，則 a 之值有幾組解？

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6　(E) 7

答案：B

解析：$\frac{315a21}{24}$為有限小數 $\Rightarrow$ $315a21$ 為 3 的倍數 ($\because\ 24=3\cdot 8=3\cdot 2^3$，分母是 2 或 5 的倍數就可化成有限小數)

$3+1+5+2+1=12$，a 可以是 0，3，6，9

二、多選題：

(　　)1. 設 a 為有理數，b、c 為無理數，下列何者必為無理數？

(A) $a-b$　(B) ab　(C) $b+c$　(D) bc　(E) $a\div b$　(F) $b\div a$　($a\neq 0$)

答案：AF

解析：(A) 有理數－無理數為無理數

(B) 例如：$0\times\sqrt{2}=0$

(C) 例如：$\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$

(D) 例如：$\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$

(E) 例如：$0\div\sqrt{2}=0$

(F) 無理數÷有理數（不為 0）為無理數

(　　)2. 下列何者正確？

(A)設 $x+y$，$x-y$ 為有理數，則 x，y 均為有理數。

(B)設 a，b 為有理數，x，y 為無理數，若 $a+x=b+y$，則 $a=b$，$x=y$。

(C)設 xy 為無理數，$x-y$ 為有理數，則 $x+y$ 為無理數。

(D)設 x^{21}，x^{17} 為有理數，則 x 為有理數

(E)設 x，y 均為有理數，則$\dfrac{y}{x}$為有理數

答案：ACD

解析：(B) $a=2$，$x=1+\sqrt{2}$，$b=3$，$y=\sqrt{2}$，$a+x=b+y=3+\sqrt{2}$但 $a\neq b$，$x\neq y$

(D) $\dfrac{x^{21}}{x^{17}}=x^4$ 為有理數，$(x^4)^4=x^{16}$ 為有理數，故 $x=\dfrac{x^{17}}{x^{16}}$為有理數

(E) $y=0$，$\dfrac{x}{y}$不存在

(A)(C)(D)正確

三、填充題：

1. a，b，c 皆為負整數，則$\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{b}{|b|}+\dfrac{c}{|c|}+\dfrac{ab}{|ab|}+\dfrac{bc}{|bc|}+\dfrac{ac}{|ac|}+\dfrac{abc}{|abc|}=$________。

答案：-1

解析：$\because$ a，b，c 皆為負整數　$\therefore$ $ab>0$，$bc>0$，$ac>0$，$abc<0$

原式$=(-1)+(-1)+(-1)+1+1+1+(-1)=-1$

2. 若 x，y 是有理數且$(5-\sqrt{2})x+(2-2\sqrt{2})y=7-3\sqrt{2}$，試求 $x+y=$________。

答案：2

解析：原式 $\Rightarrow (5x+2y)+(-x-2y)\sqrt{2}=7-3\sqrt{2}\Rightarrow \begin{cases}5x+2y=7\\-x-2y=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\Rightarrow x+y=2$

3. 將 $0.2\overline{13}+1.\overline{32}$化成最簡分數為________。

答案：$\dfrac{169}{110}$

解析：$0.2\overline{13}+1.\overline{32}=\dfrac{213-2}{990}+1\dfrac{32}{99}=\dfrac{211}{990}+\dfrac{1310}{990}=\dfrac{1521}{990}=\dfrac{169}{110}$

4. 設 $A=\sqrt{6}+\sqrt{10}$，$B=\sqrt{5}+\sqrt{11}$，$C=\sqrt{7}+3$，則三數中最大者為________。（僅填 $A.B.C$）

答案：C

解析：$A^2=16+2\sqrt{60}$，$B^2=16+2\sqrt{55}$，$C^2=16+2\sqrt{63}$

$\because$ $C^2>A^2>B^2$ 且 A，B，C 為正數　$\therefore$ $C>A>B$ 即 C 最大

5. 設 n 為正整數，則介於$\dfrac{1}{10}$與$\dfrac{1}{11}$之間的有理數，其形如$\dfrac{n}{440}$者共有________個。

答案：3

解析：$\frac{1}{11}<\frac{n}{440}<\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{40}{440}<\frac{n}{440}<\frac{44}{440}\Rightarrow 40<n<44\Rightarrow n=41$，42 或 43，共 3 個

6. 設 x，y 為有理數，若 $(2x-y-3)\sqrt{2}+(x-2y-1)\sqrt{3}=0$，則 $x=$________。

答案：$\frac{5}{3}$

解析：因 x，y 為有理數，且 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$ 均為無理數 $\Rightarrow\begin{cases}2x-y-3=0\\x-2y-1=0\end{cases}$ 解得 $x=\frac{5}{3}$，$y=\frac{1}{3}$

7. 設 x、y 為有理數，若 $\sqrt{3}(x+2\sqrt{3})+y(1-2\sqrt{3})=0$，則數對 $(x,y)=$________。

答案：$(-12,-6)$

解析：原式 $\Rightarrow\sqrt{3}x+6+y-2y\sqrt{3}=0$

$\Rightarrow(6+y)+(x-2y)\sqrt{3}=0 \quad \Rightarrow\begin{cases}6+y=0\\x-2y=0\end{cases}$

得 $y=-6$，$x=-12$，即 $(x,y)=(-12,-6)$

8. 有一個最簡分數，分子與分母的和為 70，將其化為小數並四捨五入後為 0.8，求此分數為____。

答案：$\frac{31}{39}$

解析：設該分數為 $\frac{x}{70-x}$，則 $0.75\le\frac{x}{70-x}<0.85$，即 $\frac{3}{4}\le\frac{x}{70-x}<\frac{17}{20}$

由 $\frac{3}{4}\le\frac{x}{70-x}\Rightarrow 3(70-x)\le 4x\Rightarrow 210-3x\le 4x\Rightarrow 30\le x$

由 $\frac{x}{70-x}<\frac{17}{20}\Rightarrow 20x<17(70-x)\Rightarrow 37x<1190\Rightarrow x<32.16\cdots$ 故 $30\le x<32.16\cdots$

$\therefore x=30$，31，32

$x=30$ 時，$\frac{30}{40}$ 不是最簡分數

$x=32$ 時，$\frac{32}{38}$ 不是最簡分數，故 $x=31$ $\therefore$ 所求 $=\frac{31}{39}$

9. 設 $|ax+5|\le b$ 之解為 $-1\le x\le 6$，則 $a+b=$________。

答案：5

解析：$-1\le x\le 6\Rightarrow -1-\frac{5}{2}\le x-\frac{5}{2}\le 6-\frac{5}{2}$

$\Rightarrow -\frac{7}{2}\le x-\frac{5}{2}\le\frac{7}{2}\Rightarrow\left|x-\frac{5}{2}\right|\le\frac{7}{2}$

$\Rightarrow|2x-5|\le 7\Rightarrow|-2x+5|\le 7$ $\quad a=-2$，$b=7$，$a+b=5$

10. 設 $a\in N$，若 $2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{5}}}=\frac{803}{371}$，則 $a=$_______。

答案：12

解析：$\because \dfrac{803}{371}=2+\dfrac{61}{371}=2+\dfrac{1}{\dfrac{371}{61}}=2+\dfrac{1}{6+\dfrac{5}{61}}=2+\dfrac{1}{6+\dfrac{1}{\dfrac{61}{5}}}=2+\dfrac{1}{6+\dfrac{1}{12+\dfrac{1}{5}}}$　$\therefore a=12$

四、非選題：

1. (1)將分數$\dfrac{112}{56}$，$\dfrac{133}{56}$化成小數。

(2)不必經由除法運算，請寫出下列有理數中，化成“小數”時，哪些是“有限小數”，哪些不是有限小數？　(a) $\dfrac{137}{160}$　(b) $\dfrac{111}{150}$　(c) $\dfrac{80}{48}$

答案：(1) 2, 2.375；(2) (a)(b)是有限小數，(c)不是有限小數

解析：(1) $\dfrac{112}{56}=2$。　$\dfrac{133}{56}=\dfrac{7\cdot 19}{7\cdot 8}=\dfrac{19}{8}=\dfrac{19\cdot 5^3}{2^3\cdot 5^3}=\dfrac{2375}{1000}=2.375$。

(2) (a)(b)是有限小數，(c)不是有限小數。

2. 將下列分數表成小數：(1) $\dfrac{320}{99}$。　(2) $\dfrac{133}{990}$。

答案：(1) $3.\overline{23}$；(2) $0.1\overline{34}$

解析：(1)

$$\begin{array}{r} 3.232 \\ 99\overline{)\,320} \\ 297 \\ \hline 230 \\ 198 \\ \hline 320 \\ 297 \\ \hline 230 \\ 198 \\ \hline 32 \end{array}$$

故$\dfrac{320}{99}=3.\overline{23}$

(2)

$$\begin{array}{r} 0.1343 \\ 990\overline{)\,1330} \\ 990 \\ \hline 3400 \\ 2970 \\ \hline 4300 \\ 3960 \\ \hline 3400 \\ 2970 \\ \hline 430 \end{array}$$

故$\dfrac{133}{990}=0.1\overline{34}$

3. 將下列各循環小數化成最簡分數：(1) $0.\overline{234}$。(2) $2.3\overline{12}$。

答案：(1) $\dfrac{26}{111}$；(2) $\dfrac{763}{330}$

$\boxed{\text{解析}}$：(1) $0.2\overline{34}=0.234234\cdots=\dfrac{234}{1000}+\dfrac{234}{(1000)^2}+\dfrac{234}{(1000)^3}+\cdots=\dfrac{\frac{234}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\dfrac{234}{999}=\dfrac{26}{111}$

(2) $2.3\overline{12}=2.3+0.0121212\cdots$

$$=2.3+\left(\frac{12}{10^3}+\frac{12}{10^5}+\frac{12}{10^7}+\cdots\right)=\frac{23}{10}+\frac{\frac{12}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{2289}{990}=\frac{763}{330}$$

4. 設 x 為實數，求滿足 $|x+5|<2$ 的 x 的範圍。

$\boxed{\text{答案}}$：$-7<x<-3$，幾何意義：在數線上，實數 x 與 -5 代表的點之間的距離小於 2

$\boxed{\text{解析}}$：我們分兩種情形討論：

(i) 當 $x\geq -5$，則 $|x+5|=x+5$，由 $|x+5|<2$ 得 $x+5<2$，即 $x<-3$，故知 $-5\leq x<-3$

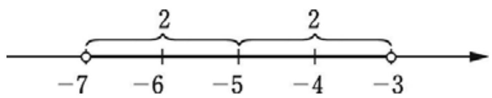
(ii) 當 $x<-5$ 時，則 $|x+5|=-(x+5)$，

由 $|x+5|<2$ 得 $-(x+5)<2$，$x+5>-2$，即 $x>-7$，故知 $-7<x<-5$

由(i)(ii)得 x 的範圍是 $-7<x<-3$

幾何意義：

$|x+5|<2$ 表示在數線上，實數 x 與 -5 代表的點之間的距離小於 2，如附圖所示：



5. 應用“實數的運算性質”計算 $536\times0.52-364\times0.48+364\times0.52-536\times0.48$。

$\boxed{\text{答案}}$：36

$\boxed{\text{解析}}$：原式 $=(536+364)\times0.52-(364+536)\times0.48=(536+364)(0.52-0.48)$

$=900\times0.04=36$。（運算律之活用）

6. 舉出滿足 $\sqrt{2}<r<\sqrt{3}$ 的一個無理數 r，並說明 r 是無理數。

(2) 求滿足 $\sqrt{2}<\dfrac{k}{10}<\sqrt{3}$ 之所有整數 k。〔提示：$\sqrt{2}=1.414\cdots$，$\sqrt{3}=1.732\cdots$。〕

$\boxed{\text{答案}}$：(1) $\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$；(2) 15，16，17

$\boxed{\text{解析}}$：(1) 取 $r=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$，則 $\sqrt{2}<r<\sqrt{3}$。

並且 r 為無理數（若 r 是有理數，則 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=2r$ 仍是有理數，產生矛盾）。

(2) 因 $\sqrt{2}=1.414\cdots$，$\sqrt{3}=1.732\cdots$，$\Rightarrow \dfrac{14}{10}<\sqrt{2}<\dfrac{k}{10}\leq\dfrac{17}{10}<\sqrt{3}$ $\Rightarrow k=15$，16，17。

7. 已知 $\dfrac{a}{b}$ 是最簡分數，a 與 b 均為一位正整數，b 的倒數等於 $\dfrac{b-3}{9a+1}$，求分數 $\dfrac{a}{b}$。

$\boxed{\text{答案}}$：$\dfrac{1}{5}$ 或 $\dfrac{3}{7}$

$\boxed{解析}$：$\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-3}{9a+1}\Rightarrow b^2-3b=9a+1$

因為 $9a+1$ 並非 3 的倍數.所以 b 也不是 3 的倍數，又 $b-3>0$，故將 $b=4，5，7，8$ 代入

合於條件的只有 $\begin{cases}a=1\\b=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=3\\b=7\end{cases}$，故 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{5}$ 或 $\dfrac{3}{7}$

8. 計算下列各式，並將答案表成十進位數。(1) $0.\overline{3}+0.\overline{6}$。 (2) $0.\overline{3}\times 0.\overline{6}$。

$\boxed{答案}$：(1) 1；(2) $0.\overline{2}$

$\boxed{解析}$：(1) $0.\overline{3}+0.\overline{6}=\dfrac{3}{9}+\dfrac{6}{9}=1$。(2) $0.\overline{3}\times 0.\overline{6}=\dfrac{3}{9}\times\dfrac{6}{9}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}=0.\overline{2}$。

9. 設 a、b 均為實數，若 $|ax+1|\geq b$ 的解為 $x\geq 6$ 或 $x\leq -2$，求 a、b 之值。

$\boxed{答案}$：$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=2$

$\boxed{解析}$：$\dfrac{-2+6}{2}=2$，$x\geq 6$ 或 $x\leq -2\Rightarrow x-2\geq 6-2$ 或 $x-2\leq -2-2$，

即 $x-2\geq 4$ 或 $x-2\leq -4$，得 $|x-2|\geq 4$，

故 $\left|\dfrac{1}{2}x-1\right|\geq 2$，即 $\left|-\dfrac{1}{2}x+1\right|\geq 2$，於是 $a=-\dfrac{1}{2}$，$b=2$

10. 設 $a=\sqrt{21}$，$b=\sqrt{21+\sqrt{21}}$，試問：

(1) a 最接近哪一個整數？說出道理。(2) b 最接近哪一個整數？說出道理。

$\boxed{答案}$：(1)5，略；(2)5，略

$\boxed{解析}$：(1) $4^2<a^2=21<5^2\Rightarrow 4<\sqrt{21}<5$，又 $\left(\dfrac{4+5}{2}\right)^2=(4.5)^2=20.25$

$\Rightarrow 4.5<\sqrt{21}<5$，$a=\sqrt{21}$ 最接近 5。

(2) $\sqrt{21+4}<b=\sqrt{21+\sqrt{21}}<\sqrt{21+5}\Rightarrow 5<b<\sqrt{26}$，

又 $5.5^2=30.25>26$，故 $5<b<\sqrt{26}<5.5$，b 最接近 5。

11. 已知 $\sqrt{3}$ 為無理數，試說明 $2\sqrt{3}$ 為無理數。

$\boxed{解析}$： 設 $2\sqrt{3}$ 為有理數，令 $2\sqrt{3}=\dfrac{q}{p}$，p，q 為整數，$(p,q)=1$

$\Rightarrow \sqrt{3}=\dfrac{q}{2p}$ 為有理數，但 $\sqrt{3}$ 為無理數，所以假設錯誤，故 $2\sqrt{3}$ 為無理數。