數學 對話式 總複習1～4冊 第 4 回 數列與級數

班級：＿＿＿＿ 座號：＿＿＿＿
姓名：＿＿＿＿ 得分：＿＿＿＿

1.	(1) 16 (2) 256	2.	丙甲乙<	3.	82；860	4.	$\frac{256}{17}$	5.	$\frac{1}{3}$
6.	(1) $\frac{10}{11}$ (2) 99	7.	33	8.	(E)	9.	(B)	10	(B)
11	(A)(C)(D)	12	(A)(B)(D)	13	$(\frac{3}{7},\frac{6}{7})$	14	670	15	2450
16	20825	17	476						

一、概念題（共 10 格，每格 5 分）

1.數列$\langle a_n\rangle$，已知$a_{13}=4$，若：

(1)$\langle a_n\rangle$爲等差，求$a_5+a_9+a_{17}+a_{21}=$＿＿＿＿

(2)$\langle a_n\rangle$爲等比，求$a_5\cdot a_9\cdot a_{17}\cdot a_{21}=$＿＿＿＿。

解 □ $a_5+a_{21}=2a_{13}=8=a_9+a_{17}$ ∴所求=16

$a_5\times a_{21}=a_9\times a_{17}=a_{13}^{\ 2}=16$ ∴所求=16^2=256

2.甲、乙、丙三人存錢，甲從今天起每日存 1 元，乙從今天起每隔一天存 2 元，丙從明天起每隔一天存 2 元。若按日以複利計算，則 10 天後三人都存入 10 元，所得的本利和由小而大爲＿＿＿＿。

解 設利率爲 r，則甲$=\sum_{k=1}^{10}1\times(1+r)^k$ $=\sum_{k=1}^{5}2\times(1+r)^{2k}$ $=\sum_{k=1}^{5}2\times(1+r)^{2k-1}$

比較得 丙甲乙<

3.已知$\sum_{k=1}^{10}a_k=9$，則$\sum_{k=1}^{10}(3a_k+k)=$＿＿＿＿，$\sum_{k=1}^{10}(10a_k+2k^2)=$＿＿＿＿。

解 ①所求$=3\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}k=3\times9+\frac{10\times11}{2}=27+55=82$

②所求$=10\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}k^2=10\times9+2\times\frac{10\times11\times21}{6}=90+770=860$

4.若數列$\langle a_n\rangle$滿足$S_n=\frac{2}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\frac{8}{a_3}+\cdots+\frac{2^n}{a_n}=n^2+2n$，求$a_8=$＿＿＿＿。

解 $S_8=64+16=80$，$S_7=49+14=63$

$\frac{2^8}{a_8}=S_8-S_7=17 \Rightarrow a_8=\frac{256}{17}$

5.數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1=27$，$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$（$n\in N$），則公比 ＿＿＿＿。

6.(1)求$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k(k+1)}=$＿＿＿＿ (2)若$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=9$，則$n=$＿＿＿＿。

解 所求$=\sum_{k=1}^{10}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$

所求$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-1=9$

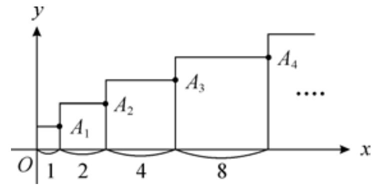
$\Rightarrow \sqrt{n+1}=10 \Rightarrow n+1=100 \Rightarrow n=99$

7.若循環小數$2.6\overline{12}$乘上正整數 k 之後變爲有限小數，則最小的 k 值爲＿＿＿＿。

解 $2.6\overline{12}=\frac{2612-26}{990}=\frac{2586}{990}=\frac{431}{165}=\frac{431}{33\times5}$，最少乘 33 才能變有限小數

二、單一選擇題（共 3 題，每題 5 分）

＿＿＿＿8.如右圖，有 n 個正方形並列在 x 軸正向上，其邊長依序爲 1、2、4、8、…、2^{n-1}，則各正方形的右上頂點 A_1、A_2、A_3、A_4、…、A_n，所在位置的 x、y 值爲下列哪個函數關係？



(A) $y=2^x$ (B) $y=2^x-1$ (C) $y=\log_2 x$ (D) $x-y=0$

(E) $x-2y+1=0$。

解 $A_n(x_n,y_n)$的$\begin{cases}x_n=1+2+4+\cdots+2^{n-1}=\frac{1\times(2^n-1)}{2-1}=2^n-1\\ y_n=2^{n-1}\end{cases}$

∴ $x_n=2y_n-1$，即 $x-2y+1=0$，選(E)

＿＿＿＿9.等差數列$\langle a_n\rangle$的前 n 項和爲 S_n，若 $S_1>S_2>S_3>S_4<S_5<S_6<S_7<\cdots$，則下列選項何者正確？

(A)公差爲負且前 4 項爲負 (B)公差爲正且前 4 項爲負

(C)公差爲負且前 4 項爲正 (D)數列$\langle a_n\rangle$各項均大於 0

(E)數列$\langle a_n\rangle$各項均小於 0。

解 $a_2=S_2-S_1<0$，$a_3=S_3-S_2<0$，$a_4=S_4-S_3<0$，$a_5=S_5-S_4>0$，…，

得公差 $d=a_5-a_4>0$

∴ a_1、a_2、a_3、a_4爲負，a_5、a_6、a_7、…爲正，選(B)

________10.設a、b、c、d四正數成等比數列，若 $a+b=8$ ，$c+d=72$ ，則公比為：

(A)2　(B)3　(C)-3　(D)$\frac{3}{2}$　(E)4。

(解) 設公比爲 r，則 $b=ar$ ，$c=ar^2$ ，$d=ar^3$

$a+b=8 \Rightarrow a+ar=8 \Rightarrow a(1+r)=8\cdots$

$c+d=72 \Rightarrow ar^2+ar^3=72 \Rightarrow ar^2(1+r)=72\cdots$

— 得 $\frac{ar^2(1+r)}{a(1+r)}=9 \Rightarrow r^2=9 \Rightarrow r\pm 3$（負不合），選(B)

三、多重選擇題（共 2 題，每題 5 分）

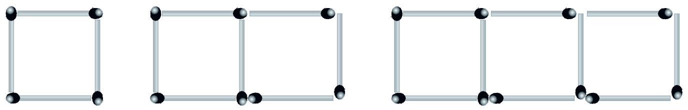
________11.等差數列$\langle a_n\rangle$的前n項和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=pn^3+qn^2+rn+s$ ，其中p、q、r、s為定數，則下列選項哪些正確？

(A) $p=0$　(B) $q=0$　(C) $s=0$　(D)公差為 $2q$　(E)首項為 r。

(解) $S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\times n=\frac{dn^2+(2a_1-d)n}{2}=\frac{d}{2}\cdot n^2+\frac{2a_1-d}{2}\cdot n$

得 $p=s=0$ ，$q=\frac{d}{2}$ ，公差 $d=2q$ ，而首項 $a_1=S_1=p+q+r+s=q+r$　∴選(A)(C)(D)

________12.用火柴拼成下列圖形：



a_n 表示第 n 個圖形的火柴數，請問下列選項哪些正確？

(A) $a_5=16$　(B) $a_7=22$　(C) $\langle a_n\rangle$不是等差數列

(D) a_{20} 是質數　(E)若有 100 根火柴，可拼成 34 個正方形。

(解) 由圖形觀察 $a_1=4$ ，$a_2=a_1+3$ ，$a_3=a_2+3$ ，…得 $a_n=a_{n-1}+3$

數列$\langle a_n\rangle$是首項爲 4，公差爲 3 的等差數列

$a_n=a_1+(n-1)d \Rightarrow a_n=4+3(n-1)=3n+1$

(A) $a_5=15+1=16$，合　(B) $a_7=21+1=22$，合

(C) $\langle a_n\rangle$是等差數列，不合

(D) $a_{20}=61$是質數，合

(E) $3n+1=100 \Rightarrow n=33$，可拼成 33 個正方形，不合

∴選(A)(B)(D)

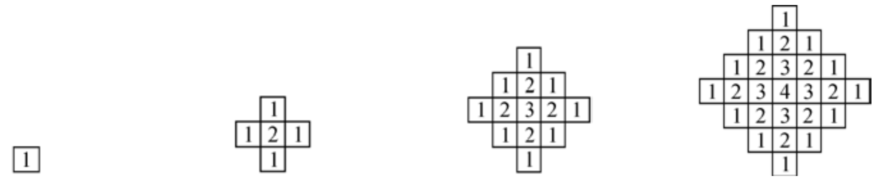
四、填充題（共 5 格，每格 5 分）

13.若數列$\langle a_n\rangle$滿足 $a_1=\frac{4}{7}$ 且 $a_{n+1}=\frac{7}{2}a_n(1-a_n)$ ，$n\geq 1$ ，求數對 $(a_{101}, a_{202})=$________。

(解) $a_2=\frac{7}{2}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}=\frac{6}{7}$ ，$a_3=\frac{7}{2}\times\frac{6}{7}\times\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$ ，$a_4=\frac{7}{2}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}=\frac{6}{7}$ ，$a_5=\frac{7}{2}\times\frac{6}{7}\times\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$ ，…

∴ $a_2=a_4=a_6=\cdots=a_{202}=\frac{6}{7}$ ，$a_3=a_5=a_7=\cdots=a_{101}=\frac{3}{7}$ ，所求$=(\frac{3}{7},\frac{6}{7})$

14.觀察下列圖(一)到圖(四)的數字排列規則，若按此規律，則圖　的所有數字之和爲________。



圖(一)　圖(二)　圖(三)　圖(四)

(解) 圖口有 1 個 10，4 個 9，8 個 8，12 個 7，…，36 個 1

所求$=1\times 10+4\times 9+8\times 8+12\times 7+\cdots+36\times 1=(1\times 36+2\times 32+3\times 28+\quad +9\times 4)+10\times 1$

$=\sum_{k=1}^{9}k(-4k+40)+10=-4\sum_{k=1}^{9}k^2+40\sum_{k=1}^{9}k+10=-1140+1800+10=670$

15.兩個等差數列$\langle a_n\rangle$與$\langle b_n\rangle$，$a_{10}+b_{50}=31$ ，$b_1+a_{41}=67$ ，求數列$\langle a_n+b_n\rangle$的前 50 項之和爲________。

(解) ∵$\langle a_n\rangle$爲等差數列　∴$a_1+a_{50}=a_{10}+a_{41}$

∴所求$=\frac{(a_1+b_1)+(a_{50}+b_{50})}{2}\times 50=\frac{b_1+b_{50}+a_{10}+a_{41}}{2}\times 50=\frac{31+67}{2}\times 50=49\times 50=2450$

16.從 1 到 50 的自然數中，所有奇數平方和爲________。

(解) $1^2+3^2+5^2+\cdots+47^2+49^2=(1^2+2^2+\cdots+50^2)-(2^2+4^2+6^2+\quad +50^2)$

$=(1^2+2^2+\cdots+50^2)-4(1^2+2^2+\quad +25^2)=\frac{50\times 51\times 101}{6}-4\times\frac{25\times 26\times 51}{6}$

$=42925-22100=20825$

17.等差數列$\langle a_n\rangle$共有 10 項，$a_1=5$，$a_2=7$，任取兩項相加得 a_1+a_2、a_1+a_3、…、a_9+a_{10}，再把重複的數字消去，則所剩的數字由小而大也成等差，請問這個新的等差級數之和爲________。

(解) $\langle a_n\rangle=5$，7，9，11，13，15，17，19，21，23，兩兩相加得

12 ，14 ，16 ，… ，28 ，16 ，18 ，… ，30 ，… ，44

5+7　5+9　5+11　5+23　7+9　7+11　7+23　21+23

去掉重複的和並由小而大得 12，14，16，…，44，共 17 項，所求$=\frac{12+44}{2}\times 17=28\times 17=476$