

1. $c < a < b$	2. (1) $b < a < c$ (2) $c < a < b$	3. $7; \frac{1}{10}$	4. 4	5. $0 < x < 2$
6. (D)	7. (1) 0.1004 (2) 1.353	8. (D)	9. (C)	10. (B)
11. (B)(C)(E)	12. (D)(E)	13. 36	14. 24	15. 2000
16. 0.399 ; (0.399, 0.399)				

一、概念題 (共 10 格, 每格 5 分)

1. 三數 $a = (\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}$, $b = (7^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}$, $c = \frac{9^{-3}}{3^{-4}}$, 則 a 、 b 、 c 由小而大為_____。

解 $a = (\frac{1}{2})^{2 \times \frac{3}{2}} = \frac{1}{8}$, $b = 7^{-1} = \frac{1}{7}$, $c = \frac{3^{-6}}{3^{-4}} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$, 故 $c < a < b$

2. (1) 若 $\log_3 a = \log_{\frac{1}{2}} b = \log_5 c > 0$, 則 a 、 b 、 c 由小而大為_____。

(2) 若 $\log_3 a = \log_{\frac{1}{2}} b = \log_5 c < 0$, 則 a 、 b 、 c 由小而大為_____。

解 令 $\log_3 a = \log_{\frac{1}{2}} b = \log_5 c = 1$, 則 $a = 3$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 5$, 故 $b < a < c$

令 $\log_3 a = \log_{\frac{1}{2}} b = \log_5 c = -1$, 則 $a = \frac{1}{3}$, $b = 2$, $c = \frac{1}{5}$, 故 $c < a < b$

3. 若 $\log_a x = 2$, $\log_a y = 3$, 則 $\log_a (x^2 y) =$ _____, $\log_{xy} \sqrt{a} =$ _____。

解 $\square \log_a (x^2 y) = 2\log_a x + \log_a y = 4 + 3 = 7$

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y = 2 + 3 = 5 \therefore \log_{xy} a = \frac{1}{5}$, $\log_{xy} \sqrt{a} = \frac{1}{2} \log_{xy} a = \frac{1}{10}$

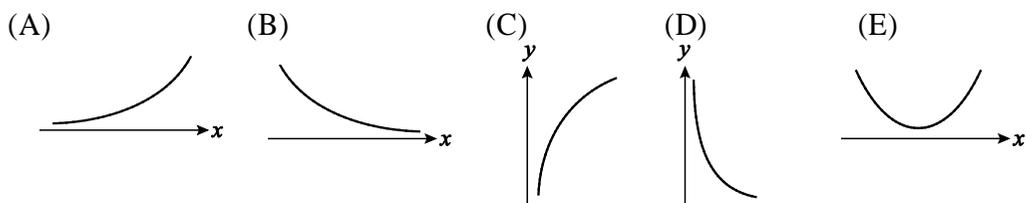
4. 若 $n < \log_3 100 < n+1$, $n \in N$, 則 $n =$ _____。

解 $\because 3^4 = 81 < 100 < 243 = 3^5 \therefore 4 < \log_3 100 < 5$, 則 $n = 4$

5. 不等式 $\log_{\frac{1}{2}} x > -1$ 的解為_____。

解 $\square x > 0 \square \log_{\frac{1}{2}} x > -1 = \log_{\frac{1}{2}} 2 \Rightarrow x < 2 \therefore 0 < x < 2$

6. 若 $0 < a < 1$, 則 $y = \log_a x$ 的函數圖形為_____。



7. 查表求對數值與真數：(1) $\log 1.26 =$ _____ (2) \log _____ $= 0.1313$ 。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1369	1399	1430

二、單一選擇題 (共 3 題, 每題 5 分)

8. 下列選項中的數值何者最小?

- (A) $(0.9)^{\frac{3}{4}}$ (B) $(0.9)^{\frac{3}{2}}$ (C) $(0.9)^{\frac{4}{3}}$ (D) $(0.9)^{\frac{2}{3}}$ (E) $(0.9)^{-\sqrt{2}}$ 。

解 $(0.9)^x$ 隨 x 增大而變小,

五個次數依次用小數表示為 -0.75 、 -1.5 、 -1.33 、 -0.66 、 -1.414

其中以 -0.66 最大 $\therefore (0.9)^{-\frac{2}{3}}$ 最小, 選(D)

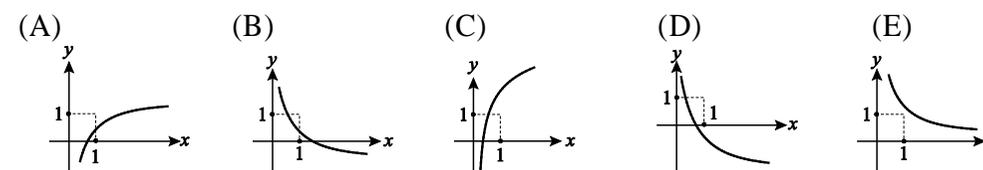
9. 若 $\log_7 123 = x$, 則下列 x 的範圍何者正確? ($\sqrt{7} \approx 2.64$)

- (A) $1 < x < 1.5$ (B) $1.5 < x < 2$ (C) $2 < x < 2.5$ (D) $2.5 < x < 3$ (E) $3 < x < 3.5$ 。

解 $\because \log_7 49 = 2$, $\log_7 49\sqrt{7} \approx \log_7 (49 \times 2.64) = \log_7 129.36 = 2.5$

而 $\log_7 49 < \log_7 123 < \log_7 129.36 \therefore 2 < x < 2.5$, 選(C)

10. 函數 $y = \log_a x + b$, 其中 $a + b = 1$, 其函數圖形可為下列哪一個選項?



解 ①若 $a > 1$, 則 $b < 0$, $y = \log_a x + b$ 遞增為 但無此選項

②若 $0 < a < 1$, 則 $0 < b < 1$, $y = \log_a x + b$ 遞減為 \therefore 選(B)

三、多重選擇題 (共 2 題, 每題 5 分)

11. 若 $x = \log_a b$ 有意義, 則下列哪些選項正確?

- (A) $b^x = a$ (B) $a^x = b$ (C) $ab > 0$ (D) 若 $a - b = 0$, 則 $x = 0$ (E) 若 $b = 1$, 則 $x = 0$ 。

【詳】即 $a^x = b$ 且 $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$, 若 $a = b$, 則 $x = \log_a a = 1$; 若 $b = 1$, 則 $x = \log_a 1 = 0$ 。∴ 選(B)(C)(E)

12. 設 $\log x = -3.6258$, 下列敘述哪些正確?

- (A) x 小於 0 (B) 首數為 -3 (C) 尾數為 0.6258 (D) x 在小數點後第 4 位開始不為 0 (E) x 小數點後第一個不為 0 的數字為 2。

【詳】(A) 應為 $x = 10^{-3.6258} > 0$, 不合

(B)(C) $\log x = -3 - 0.6258 = -4 + 0.3742$ ∴ 首數為 -4, 尾數為 0.3742, (B)(C) 皆不合

(D)(E) ∴ $\log x = \log 10^{-4} + \log 2 \dots = \log(2 \dots \times 10^{-4})$ ∴ $x = 2 \dots \times 10^{-4} = 0.0002 \dots$, (D)(E) 皆

合

∴ 選(D)(E)

四、填充題 (共 5 格, 每格 5 分)

13. 某次數學小考考完, 大雄和阿福聊起試卷裡的題目, 大雄發牢騷的說:「考試真討厭! 怎麼會有 π^π 這種鬼數字? 也不知道有多大, 拿這種數字來考我們真是沒有意義。」阿福說:「不會啊, 翻翻對數表, 動筆乘乘看, 就可以知道 π^π 大概有多大了啊!」請你利用下面的常用對數表, 並把 π 看成 3.14, 求出 π^π 的整數部分為_____。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670

【詳】 $\log \pi^\pi = \pi \log \pi \doteq 3.14 \times \log 3.14 = 3.14 \times 0.4969 = 1.560 \dots$

$= 1 + 0.560 \dots = \log 10 + \log 3.63 \dots$

$= \log 36.3 \dots$

得 $\pi^\pi = 36.3 \dots$ ∴ 整數部分為 36

14. 函數 $f(x) = 2^x - x \cdot 2^{20}$, 若正整數 k 使 $f(k) < 0$ 且 $f(k+1) > 0$, 則 $k =$ _____。

【詳】 $f(20) = 2^{20} - 20 \times 2^{20} = -19 \times 2^{20} < 0$, 還差很多

$f(24) = 2^{24} - 24 \times 2^{20} = 2^4 \times 2^{20} - 24 \times 2^{20} = -8 \times 2^{20} < 0$

$f(25) = 2^{25} - 25 \times 2^{20} = 2^5 \times 2^{20} - 25 \times 2^{20} = 7 \times 2^{20} > 0$

∴ $k = 24$

15. 老陳退休多年, 某天和兒子聊起利率:「想當年還有 12% 的年利率時, 只要帳戶擺個三百萬, 每個月就有三萬塊的利息可以過活, 吃用不愁。」兒子說:「哇! 那現在年利率只有 1.8%, 帳戶要擺多少錢才能每個月領三萬的利息啊?」請你算算看, 帳戶內應有_____萬元。

【詳】設帳戶內存有 x 萬元

$x \cdot \frac{1.8\%}{12} = x \cdot 0.0015 \geq 3$ ∴ $x \geq \frac{3}{0.0015} = 2000$ ∴ 至少 2000 萬元

16. 方程式 $1 - x = \log(10x)$ 難以用算式求解, 請利用查表解 $x =$ _____ , 並由此求出函數

$y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ 與 $y = \log_{\frac{1}{10}} x$ 兩圖形的交點坐標為_____。(兩格均求到小數點後三位)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222

【詳】① ∴ $\log 3.99 = 0.601$, 而 $0.399 + 0.601 = 1$ ∴ $1 - 0.399 = \log(10 \times 0.399)$, 得 $x = 0.399$

② $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ 與 $y = \log_{\frac{1}{10}} x$ 互為反函數, 圖形對稱於 $y = x$

看出恰交於一點且位於 $y = x$ 上, 即解 $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x = x$

取對數得 $x \log \frac{1}{10} = \log x$, 即 $-x = \log x$, 同加 1 得 $1 - x = \log(10x)$

得 $x = 0.399$

∴ 交點坐標為 $(0.399, 0.399)$

