數學 對話式 總複習1～4冊	❷回 多項式函數	班級：＿＿＿＿ 座號：＿＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿ 得分：＿＿＿＿

1.	-2036；$3x^2+4x$	2.	-11	3.	$-9+2i$	4.	$\pm1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{5}{2},\pm5,\pm7;-\frac{35}{2}$
5.	五； $x=1,3$ 或 $x\ge7$	6.	$(0,0)$；$2+3i$	7.	(E)	8.	(B)
9.	(C)	10	(C)(E)	11	(A)(C)(D)	12	17
13	$(-6,8,2,-4)$	14	$(-6,8)$	15	$-28x+17$	16	$(1,3,-2,5)$

一、概念題（共 10 格，每格 5 分）

1 多項式 $x^{11}+3x^2$ 除以 $x+2$ 的餘式爲＿＿＿＿，除以 x^5+2 的餘式爲＿＿＿＿。

(解) 所求 $=f(-2)=(-2)^{11}+3(-2)^2=-2048+12=-2036$

令 $x^5=-2$，則 $x^{11}+3x^2=(x^5)^2x+3x^2=3x^2+4x$

2. $f(x)=3x^4+14x^3-19x^2+1$， $f(-\frac{2}{3})=$＿＿＿＿。

(解)
$$\begin{array}{rrrrr|l} 3 & +14 & -19 & +0 & +1 & -\frac{2}{3} \\ & -2 & -8 & +18 & -12 & \\ \hline 3 & +12 & -27 & +18 & -11 & \end{array}$$

3. 設 $i=\sqrt{1}$， $f(x)=x^{57}-2x^{36}+7x^{18}-x^7$ ，求 $f(i)=$＿＿＿＿。

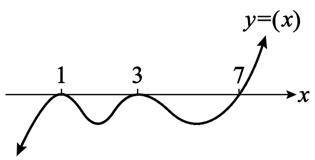
(解) $i^4=1$， $f(i)=(i^4)^{14}\cdot i-2\cdot(i^4)^9+7\cdot(i^4)^4\cdot i^2-i^4\times i^3=i-2-7+i=-9+2i$

4. a、$b\in Z$ ，方程式 $(2x^3+ax^2+5)(x^3+bx-7)=0$ 的所有可能最簡有理根（即分數根）爲＿＿＿＿，此方程式共有六個複數根（若有重根，則重複計算），此六個根的乘積爲＿＿＿＿。

(解) 由牛頓定理得所有可能有理根爲 ±1，$\pm\frac{1}{2}$，$\pm\frac{5}{2}$，±5，±7

由根與係數關係得六根乘積 $=-\frac{5}{2}\times7=-\frac{35}{2}$

5. 多項式 $f(x)$ 的圖形如右，若方程式 $f(x)=0$ 沒有虛根，則 $f(x)$ 的次數最少可爲＿＿＿＿次，而不等式 $f(x)\ge0$ 的解則爲＿＿＿＿。



(解) $f(x)$在 $x=1$、$x=3$ 有重根，最少次數爲 $2+2+1=5$

看略圖得 $f(x)\ge0$ 的解爲 $x=1$ 或 3 $x\ge7$

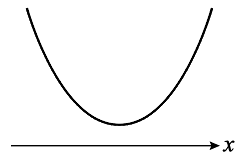
6. 實係數多項式 $f(x)$，若 $\begin{cases} f(1+i)+f(1-i)=4+ai \\ f(1+i)-f(1-i)=b+6i \end{cases}$，其中 $i=\sqrt{-1}$， a、$b\in R$ ，則數對 $(a,b)=$＿＿＿＿，且 $f(1+i)=$＿＿＿＿。

(解) 令 $f(1+i)=c+di$，則 $f(1-i)=c-di$ ，相加相減只剩實部與虛部

故 $f(1+i)+f(1-i)=4$ 及 $f(1+i)-f(1-i)=6i$ 解得 $f(1+i)=2+3i$

二、單一選擇題（共 3 題，每題 5 分）

＿＿＿＿7. 右圖的拋物線是下列哪一個二次函數的圖形？



(A) $y=3x^2+2x-1$ (B) $y=-x^2+4x-6$
(C) $y=4x^2+12x+9$ (D) $y=-2x^2+3x+1$
(E) $y=x^2-4x+5$。

(解) ①∵開口朝上 ∴(B)(D)不合

②∵與 x 軸不相交 ∴判別式應小於 0

(A) $D=2^2-4\cdot3\cdot(-1)>0$

(C) $D=12^2-4\cdot4\cdot9=0$

(E) $D=(-4)^2-4\cdot1\cdot5=-4<0$

∴選(E)

＿＿＿＿8. 若 a、b 爲方程式 $x^2+3x+1=0$ 之兩根，則計算 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ 的值爲：

(A)1 (B)-1 (C)2 (D)-5 (E)$\sqrt{5}$。

(解) 由判別式知 a、$b\in R$ ，由根與係數知 $a+b=-3$ 且 $ab=1$ ∴ $a<0$ 且 $b<0$，則

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=a+b+2\sqrt{ab}=(-3)+2\cdot\sqrt{1}=-3+2\cdot\sqrt{1}=-3+2=-1$

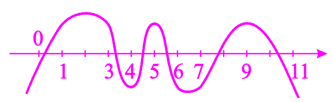
∴選(B)

＿＿＿＿9. $f(x)$ **為實係數多項式，若** $f(1)$、 $f(3)$、 $f(5)$、 $f(9)$ **的函數值為正數，** $f(0)$、 $f(4)$、 $f(6)$、 $f(7)$、 $f(11)$ **的函數值為負數，且** $f(2+i)=0$ ， $i=\sqrt{-1}$ **，則** $f(x)$ **的次數至少為幾次？**

(A)6 次 (B)7 次 (C)8 次 (D)9 次 (E)10 次。

(解) $y=f(x)$ 與 x 軸至少有 6 個交點，加上兩個共軛虛根

∴ $f(x)$ 至少爲 $6+2=8$ 次，選(C)



三、多重選擇題（共 2 題，每題 5 分）

________10.**設** $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ **，已知** $f(-2i)=f(1+2i)=f(-3)=0$ **，** $i=\sqrt{-1}$ **，則以下的推論哪些正確？**

(A) $f(2i)=0$　(B) $f(1-2i)=0$　(C) $f(2-a)=0$　(D)若實數 p、q 滿足 $f(p)\cdot f(q)<0$，則在 p、q 之間可找到實數 r 滿足 $f(r)=0$　(E)a、b、c、d 至少有一個爲虛數。

解　若 $f(x)$ 爲實係數，則 $f(x)=0$ 有五個根，但 $f(x)=0$ 只到四次

$\therefore$ $f(x)$ 應爲虛係數，則虛根不一定成對，也不能用勘根定理

由根與係數得四根之和爲 $-a=(-2i)+(1+2i)+(-3)+\alpha$

$\therefore$另一根 $\alpha=2-a$ ，得 $f(2-a)=0$　$\therefore$選(C)(E)

________11.**二次函數** $f(x)=a(x+b)^2+c$ **，其中**a**、**b**、**c**為實數，** $f(-1)=f(5)<c$ **，則下列哪些選項為真？**

(A) $a<0$　(B) $b=2$　(C) $c=f(2)$　(D) $f(1)>f(4)$　(E) $f(-3)<f(7)$ 。

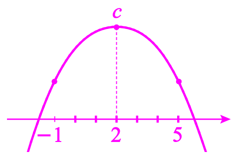
解　如右圖

(A)開口必朝下，合　(B)頂點在 $x=2$ 處，應爲 $b=-2$ ，不合

(C) $f(x)$ 的 $Max=f(2)=c$ ，合　(D) $f(1)=f(3)>f(4)$ ，合

(E)$\because$ 2 爲 -3 與 7 的中點　$\therefore$應爲 $f(-3)=f(7)$ ，不合

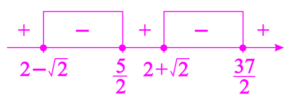
故選(A)(C)(D)



四、填充題（共 5 格，每格 5 分）

12.不等式 $(x^2-4x+2)(2x-5)(2x-37)\le 0$ 有________個整數解。

解　$(x^2-4x+2)=0$ 的根爲 $\dfrac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=2\pm\sqrt{2}$ ，



得 $2-\sqrt{2}\le x\le\dfrac{5}{2}$　或　$2+\sqrt{2}\le x\le\dfrac{37}{2}$

$\because$ $\sqrt{2}\fallingdotseq 1.414$　$\therefore$ $x=1$，2，4，5，6，⋯，18，共 17 個整數

13.已知三次多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形通過 $(-1,8)$，$(0,-4)$，並在 $(1,0)$ 處與 x 軸相切，試求序組 $(a,b,c,d)=$________。

解　$\because$切 x 軸於 $x=1$　$\therefore$ $x=1$ 爲 $f(x)=0$ 的二重根，即 $f(x)$ 有 $(x-1)^2$ 的因式

設 $f(x)=(x-1)^2(px+q)$ ，$f(-1)=4(-p+q)=8$

得 $-p+q=2$ ，$f(0)=1\cdot(0+q)=q=-4$ ，則 $p=-6$

$\therefore$ $f(x)=(x-1)^2(-6x-4)=-6x^3+8x^2+2x-4$ ，$(a,b,c,d)=(-6,8,2,-4)$

14.a、$b\in Z$ ，二次多項方程式 $f(x)=x^2+ax+b=0$ 的根均爲有理根，若 $f(\frac{3}{2})\cdot f(3)<0$ ，$f(\pi)\cdot f(\sqrt{19})<0$ ，則數對 $(a,b)=$________。

解　由牛頓法得知有理根的分母必爲 1　$\therefore$其有理根必爲整數根

$\because$ $f(\frac{3}{2})\cdot f(3)<0$　$\therefore$在 $\frac{3}{2}$、3 之間有根，即 $x=2$ 爲根

$\because$ $f(\pi)\cdot f(\sqrt{19})<0$　$\therefore$在 π 、$\sqrt{19}$ 之間有根，即 $x=4$ 爲根

得 $x^2+ax+b=(x-2)(x-4)=x^2-6x+8$ ，$a=-6$ ，$b=8$

15.若 $f(x+1)=(x+2)^3+3(x-1)^2-7(2x+1)-15$ ，求 $f(x)$ 除以 (x^2+2x-3) 的餘式爲________。

解　設 $f(x)=(x+3)(x-1)\cdot Q(x)+(ax+b)$ ，所求即 $ax+b$

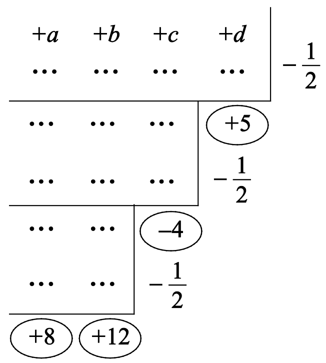
$x=0$ 代入得 $f(0+1)=8+3-7-15=-11$ ，得 $f(1)=a+b=-11\cdots$①

$x=-4$ 代入得 $f(-4+1)=(-8)+75-(-49)-15=101$ ，得 $f(-3)=-3a+b=101\cdots$②

①−②得$4a=-11-101$　$\Rightarrow$　$4a=-112$　$\Rightarrow$　$a=-28$，$b=17$

$\therefore$所求 $=-28x+17$

16.小明利用綜合除法要把 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 表示成 $(2x+1)$ 的多項式，右邊是他處理的過程，顯然他忘記老師的叮嚀，沒有把過程中所得的商除以2，所得 $f(x)=8(2x+1)^3+12(2x+1)^2-4(2x+1)+5$ 是錯誤的，若正確的答案爲 $f(x)=p(2x+1)^3+q(2x+1)^2+r(2x+1)+s$ ，請問序組 $(p,q,r,s)=$________。



解　由小明的過程知正確的 $f(x)$ 爲

$f(x)=8(x+\frac{1}{2})^3+12(x+\frac{1}{2})^2-4(x+\frac{1}{2})+5$

$\therefore$ $f(x)=(2x+1)^3+3(2x+1)^2-2(2x+1)+5$ 爲正確的

$\therefore$ $(p,q,r,s)=(1,3,-2,5)$