

數學對話式		1 數與式		班級：_____ 座號：_____	
總複習1~4冊				姓名：_____ 得分：_____	
1. 1	2. $\frac{9}{275}$	3. $x > \frac{4}{3}$ 或 $x < -2$	4. 24	5. $5\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$	
6. (3, 2)	7. -60	8. $c < b < a$	9. $k < 8$	10. 9	
11. (D)	12. (B)	13. (B)	14. (A)(C)	15. (A)(E)	
16. $\frac{47}{2}$	17. (-2, 8)	18. $\frac{\sqrt{5}}{2}$	19. $x < \frac{4}{3}$	20. 34	

### 一、概念題 (共 10 格, 每格 5 分)

1. 設  $a, b$  為有理數, 且  $(a+b\sqrt{2})(1+2\sqrt{2}) = -1+5\sqrt{2}$ , 則  $a+2b =$  \_\_\_\_\_。

解 展開合併得  $(a+4b) + (2a+b)\sqrt{2} = -1+5\sqrt{2}$

則  $a+4b = -1$  且  $2a+b = 5$ , 解得  $a = 3, b = -1$ , 得  $a+2b = 3-2 = 1$

2. 將循環小數  $0.03\overline{27}$  化成最簡分數為 \_\_\_\_\_。

解  $0.03\overline{27} = \frac{327-3}{9900} = \frac{324}{9900} = \frac{9}{275}$

3.  $x$  為實數, 若  $|3x+1| > 5$ , 則  $x$  之範圍為 \_\_\_\_\_。

解 原式  $\Rightarrow 3x+1 > 5$  或  $3x+1 < -5 \Rightarrow x > \frac{4}{3}$  或  $x < -2$

4. 設  $a, b$  為正整數且  $3a+2b = 24$ , 則  $ab$  最大值為 \_\_\_\_\_。

解 用算幾,  $\frac{3a+2b}{2} \geq \sqrt{3a \times 2b} \Rightarrow \frac{24}{2} = 12 \geq \sqrt{6ab} \Rightarrow ab \leq \frac{12^2}{6} = 24$

5. 設  $A(\sqrt{2}), B(\sqrt{3}), C(x)$  為數線上三點且  $C$  在  $\overline{AB}$  上, 若  $\overline{AC} : \overline{CB} = \sqrt{3} : \sqrt{2}$ ,  $x =$  \_\_\_\_\_。

解  $\overline{AC} : \overline{CB} = (x-\sqrt{2}) : (\sqrt{3}-x) = \sqrt{3} : \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}x-2 = 3-\sqrt{3}x \Rightarrow (\sqrt{3}+\sqrt{2})x = 5$   
 $\Rightarrow x = 5\sqrt{3}-5\sqrt{2}$

6. 設  $a, b$  為實數, 若  $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2\sqrt{2})^2} + \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ , 則數對  $(a, b) =$  \_\_\_\_\_。

解 原式  $\Rightarrow \sqrt{3}-\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{3}+2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

$\therefore (a, b) = (3, 2)$

7.  $f(x) = (x-2)(x+2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$ , 則  $f(\sqrt[3]{2}) =$  \_\_\_\_\_。

解  $f(x) = (x^3-8)(x^3+8) \Rightarrow f(\sqrt[3]{2}) = (2-8)(2+8) = -60$

8. 設  $a = \sqrt{10}-3, b = \sqrt{11}-\sqrt{10}, c = \sqrt{12}-\sqrt{11}$ , 則  $a, b, c$  三數大小關係為 \_\_\_\_\_。

解  $\frac{1}{a} = \sqrt{10}+\sqrt{9}, \frac{1}{b} = \sqrt{11}+\sqrt{10}, \frac{1}{c} = \sqrt{12}+\sqrt{11} \therefore \frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c} \therefore c < b < a$

9. 若方程式  $|x-3| + |x+5| = k$  無解, 則  $k$  的範圍為 \_\_\_\_\_。

解  $|x-3| + |x+5| = |3-x| + |x+5| \geq |3-x+x+5| = 8 \therefore k < 8$  時方程式無解

10. 將  $\frac{4}{7}$  化為小數時, 若小數點後第  $n$  位數以  $f(n)$  表示, 則  $f(2011) + f(100) =$  \_\_\_\_\_。

解  $\frac{4}{7} = 0.571428\overline{}$ , 6 位循環  $\therefore f(2011) = f(1) = 5, f(100) = f(4) = 4$ , 所  $= 9$

### 二、單一選擇題 (共 3 題, 每題 5 分)

\_\_\_\_\_ 11. 下列哪一個不是無理數?

(A)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (B)  $\pi$  (C) 0.1010010001... (D)  $2.1\overline{37}$  (E)  $4 + \sqrt{3}$ 。

解 循環小數可化為分數  $\therefore$  選(D)

\_\_\_\_\_ 12. 設  $a = \sqrt{6+\sqrt{34}}$ , 則  $a$  值在哪兩個連續整數之間?

(A) 2 與 3 (B) 3 與 4 (C) 4 與 5 (D) 5 與 6 (E) 6 與 7。

解  $5 < \sqrt{34} < 6 \Rightarrow 11 < 6 + \sqrt{34} < 12$

$\Rightarrow \sqrt{11} < \sqrt{6+\sqrt{34}} < \sqrt{12} \Rightarrow 3 < \sqrt{6+\sqrt{34}} < 4$

$\therefore$  選(B)

\_\_\_\_\_ 13.  $a, b \in \mathbb{R}, a < b, P = \frac{2a+5b}{7}, Q = \frac{a+5b}{6}, R = \frac{5a+9b}{14}$ , 則下列  $P, Q, R$  三

數大小關係何者正確?

(A)  $P < Q < R$  (B)  $R < P < Q$  (C)  $Q < P < R$  (D)  $R < Q < P$  (E)  $Q < R < P$ 。

解  $[7, 6, 14] = 42$

$P = \frac{2a+5b}{7} = \frac{12a+30b}{42} \quad Q = \frac{a+5b}{6} = \frac{7a+35b}{42} \quad R = \frac{5a+9b}{14} = \frac{15a+27b}{42}$

$\therefore R < P < Q \therefore$  選(B)

三、多重選擇題（共 2 題，每題 5 分）

14. 關於數的敘述，下列選項哪些正確？

- (A) 若  $a^2$  為有理數，且  $a^3$  為有理數，則  $a$  為有理數  
 (B) 若  $a$  是有理數， $b$  是無理數，則  $ab$  為無理數  
 (C) 若  $a+b$  與  $a-b$  都是有理數，則  $a$ 、 $b$  都是有理數  
 (D) 若  $a$ 、 $b$  都是無理數，則  $ab$  為無理數  
 (E) 若  $a$ 、 $b$  都是無理數，則  $a+b$  為無理數。

【詳】 (A)  $a = \frac{a^3}{a^2} \in \mathbb{Q}$ ，合 (B) 令  $a=0$ ，則  $ab=0 \in \mathbb{Q}$ ，不合 (C) 設  $a+b=q_1$ ， $a-b=q_2$ ，  
 得  $a = \frac{q_1+q_2}{2} \in \mathbb{Q}$ ， $b = \frac{q_1-q_2}{2} \in \mathbb{Q}$ ，合 (D)  $a=2+\sqrt{3}$ ， $b=2-\sqrt{3}$ ， $ab=4-3=1 \in \mathbb{Q}$ ，  
 不合 (E)  $a=2+\sqrt{3}$ ， $b=2-\sqrt{3}$ ， $a+b=4 \in \mathbb{Q}$ ，不合  
 $\therefore$  選(A)(C)

15.  $x, y \in \mathbb{R}$  且滿足  $|x-3| \leq 4$  與  $|y+7| \leq 5$ ，下列各式範圍哪些正確？

- (A)  $-13 \leq x+y \leq 5$  (B)  $9 \leq x-y \leq 11$  (C)  $1 \leq x^2 \leq 49$  (D)  $0 \leq y^2 \leq 144$

(E)  $-\frac{7}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 1$ 。

【詳】  $|x-3| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x-3 \leq 4 \Rightarrow -1 \leq x \leq 7$   
 $|y+7| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq y+7 \leq 5 \Rightarrow -12 \leq y \leq -2$   
 (A)  $-13 \leq x+y \leq 5$ ，合  
 (B)  $2 \leq -y \leq 12 \Rightarrow 1 \leq x+(-y) \leq 19 \Rightarrow 1 \leq x-y \leq 19$ ，不合  
 (C)  $\because -1 \leq x \leq 7 \therefore x$  可以為 0  $\therefore 0^2 \leq x^2 \leq 49$ ，不合  
 (D)  $-12 \leq y \leq -2 \Rightarrow 4 \leq y^2 \leq 144$ ，不合  
 (E)  $-12 \leq y \leq -2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{12}$ ； $-\frac{7}{2} \leq x \cdot \frac{1}{y} \leq 1 \Rightarrow -\frac{7}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 1$ ，合  
 $\therefore$  選(A)(E)

四、填充題（共 5 格，每格 5 分）

16.  $a, b \in \mathbb{R}$ ， $a+b=4$ ， $ab=-1$ ，則  $\frac{b^2}{a+1} + \frac{a^2}{b+1} =$  \_\_\_\_\_。

【詳】  $\frac{b^2}{a+1} + \frac{a^2}{b+1} = \frac{b^2(b+1)+a^2(a+1)}{(a+1)(b+1)} = \frac{(a^3+b^3)+(a^2+b^2)}{ab+a+b+1}$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=18$ ， $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=76$

所求  $= \frac{76+18}{-1+4+1} = \frac{94}{4} = \frac{47}{2}$

17.  $a, b \in \mathbb{R}$ ，若不等式  $|ax+4| \leq b$  的解為  $-2 \leq x \leq 6$ ，則數對  $(a, b) =$  \_\_\_\_\_。

【詳】  $-2 \leq x \leq 6 \Rightarrow -2-2 \leq x-2 \leq 6-2 \Rightarrow -4 \leq x-2 \leq 4$   
 $\Rightarrow |x-2| \leq 4 \Rightarrow |-2||x-2| \leq |-2| \cdot 4$   
 $\Rightarrow |-2(x-2)| \leq 8 \Rightarrow |-2x+4| \leq 8$ ，得  $a=-2$ ， $b=8$   
 $\therefore (a, b) = (-2, 8)$

18. 設  $\sqrt{41-12\sqrt{5}}$  的整數部分為  $a$ ，小數部分為  $b$ ，求  $\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b-9} =$  \_\_\_\_\_。

【詳】  $\sqrt{41-12\sqrt{5}} = \sqrt{41-2\sqrt{180}} = \sqrt{36}-\sqrt{5} = 6-\sqrt{5}$   
 $\because 2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow -3 < -\sqrt{5} < -2 \Rightarrow 3 < 6-\sqrt{5} < 4$   
 故  $6-\sqrt{5} = 3+(3-\sqrt{5})$ ，得  $a=3$ ， $b=3-\sqrt{5}$   
 $\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b-9} = \frac{1}{3-\sqrt{5}} + \frac{1}{6-\sqrt{5}-9} = \frac{1}{3-\sqrt{5}} + \frac{1}{-3-\sqrt{5}} = \frac{1}{3-\sqrt{5}} - \frac{1}{3+\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} - \frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

19. 不等式  $|x-2|-3|x+1| > 2x-9$  的解為 \_\_\_\_\_。

【詳】 將數線分成  $x \geq 2$ 、 $-1 \leq x < 2$ ，和  $x < -1$  三段討論  
 $x \geq 2$  時，原式為  $(x-2)-3(x+1) > 2x-9 \Rightarrow x < 1$ ，不合  
 $-1 \leq x < 2$  時，原式為  $(2-x)-3(x+1) > 2x-9 \Rightarrow -6x > -8 \Rightarrow x < \frac{4}{3}$   
 在  $-1 \leq x < 2$  的限制下，其解為  $-1 \leq x < \frac{4}{3}$   
 $x < -1$  時，原式為  $(2-x)+3(x+1) > 2x-9 \Rightarrow 2x+5 > 2x-9 \Rightarrow 0x > -14 \Rightarrow x$  為任意數  
 在  $x < -1$  的限制下，其解為  $x < -1$   
 綜合 得出不等式的解為  $x < \frac{4}{3}$

20. 已知  $k$  為正整數且滿足  $\frac{k}{13} < \sqrt{7} < \frac{k+1}{13}$ ，試問  $k$  值為 \_\_\_\_\_。

【詳】  $\frac{k}{13} < \sqrt{7} < \frac{k+1}{13} \Rightarrow k < 13\sqrt{7} < k+1 \Rightarrow k < \sqrt{1183} < k+1$   
 $32^2=1024$ ， $33^2=1089$ ， $34^2=1156$ ， $35^2=1225$   
 $\Rightarrow 1156 < 1183 < 1225$   
 $\Rightarrow 34 < \sqrt{1183} < 35 \Rightarrow 34 < 13\sqrt{7} < 35$ ， $k=34$