

數學對話式		1 數與式		班級：_____ 座號：_____	
總複習1~4冊				姓名：_____ 得分：_____	
1. 1	2. $\frac{9}{275}$	3. $x > \frac{4}{3}$ 或 $x < -2$	4. 24	5. $5\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$	
6. (3, 2)	7. -60	8. $c < b < a$	9. $k < 8$	10. 9	
11. (D)	12. (B)	13. (B)	14. (A)(C)	15. (A)(E)	
16. $\frac{47}{2}$	17. (-2, 8)	18. $\frac{\sqrt{5}}{2}$	19. $x < \frac{4}{3}$	20. 34	

一、概念題 (共 10 格, 每格 5 分)

1. 設 a, b 為有理數, 且 $(a+b\sqrt{2})(1+2\sqrt{2}) = -1+5\sqrt{2}$, 則 $a+2b =$ _____。

解 展開合併得 $(a+4b) + (2a+b)\sqrt{2} = -1+5\sqrt{2}$

則 $a+4b = -1$ 且 $2a+b = 5$, 解得 $a = 3, b = -1$, 得 $a+2b = 3-2 = 1$

2. 將循環小數 $0.03\overline{27}$ 化成最簡分數為 _____。

解 $0.03\overline{27} = \frac{327-3}{9900} = \frac{324}{9900} = \frac{9}{275}$

3. x 為實數, 若 $|3x+1| > 5$, 則 x 之範圍為 _____。

解 原式 $\Rightarrow 3x+1 > 5$ 或 $3x+1 < -5 \Rightarrow x > \frac{4}{3}$ 或 $x < -2$

4. 設 a, b 為正整數且 $3a+2b = 24$, 則 ab 最大值為 _____。

解 用算幾, $\frac{3a+2b}{2} \geq \sqrt{3a \times 2b} \Rightarrow \frac{24}{2} = 12 \geq \sqrt{6ab} \Rightarrow ab \leq \frac{12^2}{6} = 24$

5. 設 $A(\sqrt{2}), B(\sqrt{3}), C(x)$ 為數線上三點且 C 在 \overline{AB} 上, 若 $\overline{AC} : \overline{CB} = \sqrt{3} : \sqrt{2}$, $x =$ _____。

解 $\overline{AC} : \overline{CB} = (x-\sqrt{2}) : (\sqrt{3}-x) = \sqrt{3} : \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}x-2 = 3-\sqrt{3}x \Rightarrow (\sqrt{3}+\sqrt{2})x = 5$
 $\Rightarrow x = 5\sqrt{3}-5\sqrt{2}$

6. 設 a, b 為實數, 若 $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2\sqrt{2})^2} + \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$, 則數對 $(a, b) =$ _____。

解 原式 $\Rightarrow \sqrt{3}-\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{3}+2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

$\therefore (a, b) = (3, 2)$

7. $f(x) = (x-2)(x+2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$, 則 $f(\sqrt[3]{2}) =$ _____。

解 $f(x) = (x^3-8)(x^3+8) \Rightarrow f(\sqrt[3]{2}) = (2-8)(2+8) = -60$

8. 設 $a = \sqrt{10}-3, b = \sqrt{11}-\sqrt{10}, c = \sqrt{12}-\sqrt{11}$, 則 a, b, c 三數大小關係為 _____。

解 $\frac{1}{a} = \sqrt{10}+\sqrt{9}, \frac{1}{b} = \sqrt{11}+\sqrt{10}, \frac{1}{c} = \sqrt{12}+\sqrt{11} \therefore \frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c} \therefore c < b < a$

9. 若方程式 $|x-3| + |x+5| = k$ 無解, 則 k 的範圍為 _____。

解 $|x-3| + |x+5| = |3-x| + |x+5| \geq |3-x+x+5| = 8 \therefore k < 8$ 時方程式無解

10. 將 $\frac{4}{7}$ 化為小數時, 若小數點後第 n 位數以 $f(n)$ 表示, 則 $f(2011) + f(100) =$ _____。

解 $\frac{4}{7} = 0.571428$, 6位循環 $\therefore f(2011) = f(1) = 5, f(100) = f(4) = 4$, 所 $= 9$

二、單一選擇題 (共 3 題, 每題 5 分)

_____ 11. 下列哪一個不是無理數?

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) π (C) 0.1010010001... (D) $2.\overline{137}$ (E) $4+\sqrt{3}$ 。

解 循環小數可化為分數 \therefore 選(D)

_____ 12. 設 $a = \sqrt{6+\sqrt{34}}$, 則 a 值在哪兩個連續整數之間?

(A) 2 與 3 (B) 3 與 4 (C) 4 與 5 (D) 5 與 6 (E) 6 與 7。

解 $5 < \sqrt{34} < 6 \Rightarrow 11 < 6+\sqrt{34} < 12$

$\Rightarrow \sqrt{11} < \sqrt{6+\sqrt{34}} < \sqrt{12} \Rightarrow 3 < \sqrt{6+\sqrt{34}} < 4$

\therefore 選(B)

_____ 13. $a, b \in \mathbb{R}, a < b, P = \frac{2a+5b}{7}, Q = \frac{a+5b}{6}, R = \frac{5a+9b}{14}$, 則下列 P, Q, R 三

數大小關係何者正確?

(A) $P < Q < R$ (B) $R < P < Q$ (C) $Q < P < R$ (D) $R < Q < P$ (E) $Q < R < P$ 。

解 $[7, 6, 14] = 42$

$P = \frac{2a+5b}{7} = \frac{12a+30b}{42} \quad Q = \frac{a+5b}{6} = \frac{7a+35b}{42} \quad R = \frac{5a+9b}{14} = \frac{15a+27b}{42}$

$\therefore R < P < Q \therefore$ 選(B)

三、多重選擇題（共 2 題，每題 5 分）

14. 關於數的敘述，下列選項哪些正確？

- (A) 若 a^2 為有理數，且 a^3 為有理數，則 a 為有理數
 (B) 若 a 是有理數， b 是無理數，則 ab 為無理數
 (C) 若 $a+b$ 與 $a-b$ 都是有理數，則 a 、 b 都是有理數
 (D) 若 a 、 b 都是無理數，則 ab 為無理數
 (E) 若 a 、 b 都是無理數，則 $a+b$ 為無理數。

【詳】 (A) $a = \frac{a^3}{a^2} \in \mathbb{Q}$ ，合 (B) 令 $a=0$ ，則 $ab=0 \in \mathbb{Q}$ ，不合 (C) 設 $a+b=q_1$ ， $a-b=q_2$ ，
 得 $a = \frac{q_1+q_2}{2} \in \mathbb{Q}$ ， $b = \frac{q_1-q_2}{2} \in \mathbb{Q}$ ，合 (D) $a=2+\sqrt{3}$ ， $b=2-\sqrt{3}$ ， $ab=4-3=1 \in \mathbb{Q}$ ，
 不合 (E) $a=2+\sqrt{3}$ ， $b=2-\sqrt{3}$ ， $a+b=4 \in \mathbb{Q}$ ，不合
 \therefore 選(A)(C)

15. $x, y \in \mathbb{R}$ 且滿足 $|x-3| \leq 4$ 與 $|y+7| \leq 5$ ，下列各式範圍哪些正確？

- (A) $-13 \leq x+y \leq 5$ (B) $9 \leq x-y \leq 11$ (C) $1 \leq x^2 \leq 49$ (D) $0 \leq y^2 \leq 144$

(E) $-\frac{7}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 1$ 。

【詳】 $|x-3| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x-3 \leq 4 \Rightarrow -1 \leq x \leq 7$
 $|y+7| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq y+7 \leq 5 \Rightarrow -12 \leq y \leq -2$
 (A) $-13 \leq x+y \leq 5$ ，合
 (B) $2 \leq -y \leq 12 \Rightarrow 1 \leq x+(-y) \leq 19 \Rightarrow 1 \leq x-y \leq 19$ ，不合
 (C) $\because -1 \leq x \leq 7 \therefore x$ 可以為 0 $\therefore 0^2 \leq x^2 \leq 49$ ，不合
 (D) $-12 \leq y \leq -2 \Rightarrow 4 \leq y^2 \leq 144$ ，不合
 (E) $-12 \leq y \leq -2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{12}$ ； $-\frac{7}{2} \leq x \cdot \frac{1}{y} \leq 1 \Rightarrow -\frac{7}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 1$ ，合
 \therefore 選(A)(E)

四、填充題（共 5 格，每格 5 分）

16. $a, b \in \mathbb{R}$ ， $a+b=4$ ， $ab=-1$ ，則 $\frac{b^2}{a+1} + \frac{a^2}{b+1} =$ _____。

【詳】 $\frac{b^2}{a+1} + \frac{a^2}{b+1} = \frac{b^2(b+1)+a^2(a+1)}{(a+1)(b+1)} = \frac{(a^3+b^3)+(a^2+b^2)}{ab+a+b+1}$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=18$ ， $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=76$

所求 $= \frac{76+18}{-1+4+1} = \frac{94}{4} = \frac{47}{2}$

17. $a, b \in \mathbb{R}$ ，若不等式 $|ax+4| \leq b$ 的解為 $-2 \leq x \leq 6$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。

【詳】 $-2 \leq x \leq 6 \Rightarrow -2-2 \leq x-2 \leq 6-2 \Rightarrow -4 \leq x-2 \leq 4$
 $\Rightarrow |x-2| \leq 4 \Rightarrow |-2||x-2| \leq |-2| \cdot 4$
 $\Rightarrow |-2(x-2)| \leq 8 \Rightarrow |-2x+4| \leq 8$ ，得 $a=-2$ ， $b=8$
 $\therefore (a, b) = (-2, 8)$

18. 設 $\sqrt{41-12\sqrt{5}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，求 $\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b-9} =$ _____。

【詳】 $\sqrt{41-12\sqrt{5}} = \sqrt{41-2\sqrt{180}} = \sqrt{36-\sqrt{5}} = 6-\sqrt{5}$
 $\because 2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow -3 < -\sqrt{5} < -2 \Rightarrow 3 < 6-\sqrt{5} < 4$
 故 $6-\sqrt{5} = 3+(3-\sqrt{5})$ ，得 $a=3$ ， $b=3-\sqrt{5}$
 $\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b-9} = \frac{1}{3-\sqrt{5}} + \frac{1}{6-\sqrt{5}-9} = \frac{1}{3-\sqrt{5}} + \frac{1}{-3-\sqrt{5}} = \frac{1}{3-\sqrt{5}} - \frac{1}{3+\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} - \frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

19. 不等式 $|x-2|-3|x+1| > 2x-9$ 的解為 _____。

【詳】 將數線分成 $x \geq 2$ 、 $-1 \leq x < 2$ ，和 $x < -1$ 三段討論
 $x \geq 2$ 時，原式為 $(x-2)-3(x+1) > 2x-9 \Rightarrow x < 1$ ，不合
 $-1 \leq x < 2$ 時，原式為 $(2-x)-3(x+1) > 2x-9 \Rightarrow -6x > -8 \Rightarrow x < \frac{4}{3}$
 在 $-1 \leq x < 2$ 的限制下，其解為 $-1 \leq x < \frac{4}{3}$
 $x < -1$ 時，原式為 $(2-x)+3(x+1) > 2x-9 \Rightarrow 2x+5 > 2x-9 \Rightarrow 0x > -14 \Rightarrow x$ 為任意數
 在 $x < -1$ 的限制下，其解為 $x < -1$
 綜合 得出不等式的解為 $x < \frac{4}{3}$

20. 已知 k 為正整數且滿足 $\frac{k}{13} < \sqrt{7} < \frac{k+1}{13}$ ，試問 k 值為 _____。

【詳】 $\frac{k}{13} < \sqrt{7} < \frac{k+1}{13} \Rightarrow k < 13\sqrt{7} < k+1 \Rightarrow k < \sqrt{1183} < k+1$
 $32^2=1024$ ， $33^2=1089$ ， $34^2=1156$ ， $35^2=1225$
 $\Rightarrow 1156 < 1183 < 1225$
 $\Rightarrow 34 < \sqrt{1183} < 35 \Rightarrow 34 < 13\sqrt{7} < 35$ ， $k=34$