	高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期:102.06.10						
範	2.2 操动, 按/丹操动	班級	一年	斑	姓		
韋	3-3 機率、條件機率	座號			名		

一、填充題 (每題 10 分)

1.若將「probability」這個字的字母任意排列,則(1)兩個<math>b相鄰的機率為______

(2)相同字母都不相鄰的機率為_____.

解答
$$(1)\frac{2}{11};(2)\frac{37}{55}$$

解析 (1)任意排列的排列數 = $\frac{11!}{2!2!}$,兩個 b 相鄰的排列數 = $\frac{10!}{2!}$

兩個
$$b$$
 相鄰排列的機率 $=\frac{\frac{10!}{2!}}{\frac{11!}{2!2!}} = \frac{2}{11}$.

(2)設 b 相鄰的排列形成 A 集合, i 相鄰的排列形成 B 集合

$$n(A) = n(B) = \frac{10!}{2!}$$
, $n(A \cap B) = 9!$, $n(A \cup B) = 2 \times \frac{10!}{2!} - 9! = 10! - 9! = 9 \times 9!$

相同字母不相鄰排列的機率 =
$$1 - (\frac{9 \times 9!}{\frac{11!}{2!2!}}) = 1 - \frac{18}{55} = \frac{37}{55}$$
.

2.已知路旁有 10 棵樹,將它們任意編號為 1 , 2 , 3 , … , 9 , 10 ,且其中有四棵松樹,則編號為 4 與 5 都是松樹的機率為______.

 $\frac{}{}$ 解答 $\frac{2}{15}$

解析 四棵松樹的編號中有兩棵編 4、5 的方法數為 $C_2^4 \times 2! \times 8!$

10 棵樹任意編號有 11!方法所以四棵松樹編號為 4 與 5 的機率 $\frac{6 \times 2! \times 8!}{10!} = \frac{2}{15}$.

3.自一副撲克(A poker hand)牌 52 張中任取 5 張,求 5 張牌成為「富而好施」(Full house),即點數如(x, x, y, y, y)的形式,但 x, y 是不同點數 的機率為______.

解答
$$\frac{6}{4165}$$
;

解析
$$p = \frac{C_3^{13} \times \frac{3!}{2!} \times C_2^4 \times C_2^4 \times C_1^4}{C_5^{52}} = \frac{13 \times 6 \times 11 \times 6 \times 6 \times 4}{\underbrace{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}_{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}} = \frac{198}{4165}.$$

4.袋中有4紅球,7白球;每次取1球,取出不放回,每球被取到的機會相等,則第3次取到紅球之機率為

取出不放回 \Rightarrow 如同抽獎 \Rightarrow 第 3 次抽中紅球如同第一次抽中紅球 \therefore 所求機率為 $\frac{4}{11}$.

5.同時擲3粒公正的骰子,求點數和為10的機率為種.

解析 $(1, 3, 6) \rightarrow 3! = 6,$

 $(1, 4, 5) \rightarrow 3! = 6,$

 $(2, 3, 5) \rightarrow 3! = 6,$

 $(2, 2, 6) \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3,$

 $(2, 4, 4) \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3,$

 $(3, 3, 4) = \frac{3!}{2!} = 3,$

 $p = \frac{6+6+6+3+3+3}{6^3} = \frac{1}{8}$.

6. 擲一公正骰子 3 次, 若出現點數為 a, b, c, 則滿足 $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ 之機率為_____

解析 $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ $\Rightarrow a \neq b \perp b \neq c \perp c \neq a$

同塗色; 有6×5×4=120

$$\downarrow \downarrow \downarrow a c b$$

$$p = \frac{120}{6^4} = \frac{5}{54}$$
.

7.有大小不同尺寸之鞋6雙,任取4隻,則此4隻中恰有2雙之機率為_

解答 $\frac{1}{33}$

解析 $p = \frac{C_2^6}{C_2^{12}} = \frac{1}{33}$.

8.從不大於 500 的自然數中, 任取一數, 則其與 500 互質之機率為_____

解析 $500 = 2^2 \times 5^3$,不大於 500 與 500 互質的數共有 $500 \times (1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{5}) = 500 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = 200$

所求為 $\frac{200}{500} = \frac{2}{5}$.

9.甲、乙、丙等 6 位同學平均編入A,B,C 三班,求甲、乙、丙三人均不在同一班的機率為_

解析 所求
$$p = \frac{(C_1^3 C_1^2 C_1^1 \times \frac{1}{3!} \times 3!) \times 3!}{(C_2^6 C_2^4 C_2^2 \times \frac{1}{3!}) \times 3!} = \frac{2}{5}$$
.

10.某麵包店將前一天未賣完的隔夜麵包2個,與11個當天出爐的麵包放在一起出售,<u>大華</u>到該麵包店買麵包,從這13個麵包中隨機拿了3個,則<u>大華</u>買到至少一個隔夜麵包的機率為_____.

 $\frac{11}{26}$

解析 至少一個隔夜麵包即 全部-(三個新鮮),所求= $1-\frac{C_3^{11}}{C_3^{13}}=1-\frac{11\times10\times9}{13\times12\times11}=1-\frac{15}{26}=\frac{11}{26}$.

11. 若 A, B 為兩事件, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(B') = \frac{2}{3}$, 則 $P(B'|A) = ______$.

解答 5

解析 : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$: $\frac{3}{4} = P(A) + (1 - \frac{2}{3}) - \frac{1}{4} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}$

故
$$P(B'|A) = \frac{P(A \cap B')}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8}$$

12.設 A, B 為樣本空間 S 中的二個事件, A 發生之機率為 P(A),若 $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$,

則 $P(A' \mid B') = _____.$

解析 : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{8} = \frac{19}{24}$

$$\therefore P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{19}{24} = \frac{5}{24}$$

世
$$P(A' \mid B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A' \cap B')}{1 - P(B)} = \frac{\frac{5}{24}}{\frac{1}{3}} = \frac{5}{8}$$
.

13.投擲一公正骰子三次,令 A 表三次出現點數和為 12 的事件,B 表第一次擲出偶數點的事件,則 (1)P(A) =______. (2)P(B'|A) =______.

解答 $(1)\frac{25}{216};(2)\frac{12}{25}$

解析 (1)點數和為 12 的情況有

(6, 5, 1)排列數為 3! = 6, (6, 4, 2)排列數為 3! = 6, (6, 3, 3)排列數為 $\frac{3!}{2!} = 3$

$$(5, 5, 2)$$
排列數為 $\frac{3!}{2!}$ = 3, $(5, 4, 3)$ 排列數為 $3!$ = 6, $(4, 4, 4)$ 排列數為 $\frac{3!}{3!}$ = 1

∴ 共有 6+6+3+3+6+1=25 種, 故
$$P(A) = \frac{25}{6^3} = \frac{25}{216}$$
.

$$(2)P(B'|A) = \frac{P(B' \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)}$$

 $A \cap B$ 表第一次偶數且點數和為 12 的事件, 其個數有:

- (6, 5, 1)個數有 2! = 2, (6, 4, 2)個數有 3! = 6, (6, 3, 3)個數有 1
- (2, 5, 5)個數有 1, (4, 5, 3)個數有 2! = 2, (4, 4, 4)個數有 1

$$\therefore n(A \cap B) = 2 + 6 + 1 + 1 + 2 + 1 = 13 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{13}{6^3} = \frac{13}{216}$$

故
$$P(B'|A) = \frac{\frac{25}{216} - \frac{13}{216}}{\frac{25}{216}} = \frac{12}{25}$$
.

- 14.從52張撲克牌中先抽出一張後,再從剩下51張牌中任取2張,則
- (1)三張牌中至少有一張紅心的機率為.
- (2)若已知三張牌中至少有一張紅心,則第一次抽出的一張牌為紅心的機率為

解答
$$(1)\frac{997}{1700}$$
;(2) $\frac{425}{997}$

解析 (1)設 A 表三張牌中至少有一張紅心的事件,則

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{C_1^{39} \times C_2^{38}}{C_1^{52} \times C_2^{51}} = 1 - \frac{703}{1700} = \frac{997}{1700}$$
.

(2)設
$$B$$
 表第一次抽出紅心的事件,則 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{C_1^{13} \times C_2^{51}}{C_1^{52} \times C_2^{51}}}{\frac{997}{1700}} = \frac{425}{997}$.

- 15.某校學生中,高一占 40%,高二占 30%,高三占 30%,又知高一學生中有 50%是近視者,高二學生中有 60%是近視者,高三學生中有 70%是近視者.從該校學生中任抽選一人,則
- (1)此人不患近視的機率為_____.(2)所選的人已知患近視,求此人為高二學生的機率為___.

解答
$$(1)\frac{41}{100};(2)\frac{18}{59}$$

解析 設 A_1 , A_2 , A_3 依次表所選一人為高一、高二、高三學生的事件, R 表所選一人為近視者事件, 則

$$(1)P(R) = P(A_1) \cdot P(R \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(R \mid A_2) + P(A_3) \cdot P(R \mid A_3)$$
$$= \frac{40}{100} \times \frac{50}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{70}{100} = \frac{59}{100}$$

$$\therefore P(R') = 1 - P(R) = 1 - \frac{59}{100} = \frac{41}{100}.$$

$$(2)P(A_2 \mid R) = \frac{P(A_2 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(A_2)P(R \mid A_2)}{P(R)} = \frac{\frac{30}{100} \times \frac{60}{100}}{\frac{59}{100}} = \frac{18}{59}.$$

16.從一副撲克牌中抽出 5 張,已知其中 4 張是紅心,求另外一張也是紅心的機率為______

解答 $\frac{3}{68}$

解析 設 A 表前 4 張牌皆為紅心的事件, B 表第 5 張是紅心的事件,則所求為 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

: 其中 4 張紅心機率 $P(A) = \frac{C_4^{13}C_1^{39} + C_5^{13}}{C_5^{52}}$ 且 $P(A \cap B)$ 表 5 張皆紅心機率 $P(A \cap B) = \frac{C_5^{13}}{C_5^{52}}$

$$\Rightarrow P(B \mid A) = \frac{\frac{C_5^{13}}{C_5^{52}}}{\frac{C_4^{13}C_1^{39} + C_5^{13}}{C_5^{52}}} = \frac{9}{204} = \frac{3}{68}.$$

- 17.一袋中有3白球、4紅球、5黑球,今從袋中逐次取球.每次一球,取3次,取出不放回.若袋中每一球被取中的機會均等,則
- (1)三球為兩色的機率為
- (2)第三次取中白球的機率為_____.
- (3)若已知取出三球為兩色,則第三次取中白球的機率為_____.
- (4)若已知第三次取中白球,則三球恰為兩色的機率為_____.

解答
$$(1)\frac{29}{44};(2)\frac{1}{4};(3)\frac{34}{145};(4)\frac{34}{55}$$

解析 (1)A 表三球恰為兩色的事件:(任三球)-(三球三色)-(三球一色)

$$n(A) = P_3^{12} - (C_1^3 \times C_1^4 \times C_1^5 \times 3!) - (P_3^3 + P_3^4 + P_3^5) = 1320 - 360 - 90 = 870$$

$$P(A) = \frac{870}{12 \times 11 \times 10} = \frac{29}{44}$$
.

(2)第三次取到白球的機率=第一次取到白球的機率

B 表第三次取中白球的事件 ∴ $P(B) = (第一次取中白球機率) = \frac{3 \times 11 \times 10}{12 \times 11 \times 10} = \frac{1}{4}$.

(3)
$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

 $A \cap B$ 表三球兩色且第三次白球的事件,其情況有

(白, 紅, 白), (紅, 白, 白), (黑, 白, 白), (白, 黑, 白), (紅, 紅, 白), (黑, 黑, 白)

$$\therefore$$
 $n(A \cap B) = 3 \times 4 \times 2 + 4 \times 3 \times 2 + 5 \times 3 \times 2 + 3 \times 5 \times 2 + 4 \times 3 \times 3 + 5 \times 4 \times 3 = 204$

$$\Rightarrow P(B \mid A) = \frac{204}{870} = \frac{34}{145}$$
.

$$(4) n(B) = 3 \times 11 \times 10 = 330 P(A \mid B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{204}{330} = \frac{34}{55}.$$

18.甲說實話的機率為 $\frac{2}{3}$,乙說實話的機率為 $\frac{4}{5}$,一袋中裝有5白球、3紅球,每球被取中的機會均等.

今從袋中任取一球,若甲、乙兩人均說是紅球,則此球是白球的機率為_____

解析 設A表任取一球,甲、乙兩人均說是紅球的事件,有二種情形

①取到白球、甲說謊、乙說謊;②取到紅球、甲說實話、乙說實話

$$\text{III } P(A) = \frac{5}{8} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{8} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{5 + 24}{120} = \frac{29}{120}$$

設
$$B$$
 表所取出之球為白球的事件,則所求機率為 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{8} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}}{\frac{29}{120}} = \frac{5}{29}$.

19.設甲袋中有 10 個電燈泡,其中 3 個壞的;乙袋中有 6 個電燈泡,其中 1 個壞的;丙袋中有 8 個電燈泡,其中 2 個壞的;若任選一袋,由選出袋中任取一燈泡(選袋、選燈泡的機會均等),則抽中一個壞燈泡的機率為

解答

 $\frac{43}{180}$

解析



設A, B, C 分別表選甲袋、乙袋、丙袋的事件, 並設D 表抽到一壞燈泡的事件, 則

$$P(D) = P(A)P(D \mid A) + P(B)P(D \mid B) + P(C)P(D \mid C) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{8}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{18 + 10 + 15}{180} = \frac{43}{180} .$$

20.甲、乙二人打靶,甲平均每4發打中3發,乙平均每3發打中2發,今二人各射2發,則 (1)此靶面未被射中的機率為______. (2)A 表靶面恰射中2發的事件,B表甲與乙各射中1發的事件,

解答
$$(1)\frac{1}{144};(2)\frac{37}{144}, \frac{24}{37}$$

解析 (1)甲射 2 發均未打中且乙射 2 發均未打中之機率 p,則 $p = (\frac{1}{4})^2 \times (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{144}$.

$$(2)P(A) = (\frac{3}{4})^2 \cdot (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{4})^2 \cdot (\frac{2}{3})^2 + (C_1^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4})(C_1^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}) = \frac{37}{144}.$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{C_1^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot C_1^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{37}{144}} = \frac{\frac{24}{144}}{\frac{37}{144}} = \frac{24}{37}.$$

解答 $(1)\frac{8}{19};(2)\frac{8}{19}$

解析
$$(1)p = \frac{C_1^4 \cdot C_2^{16}}{C_3^{20}} = \frac{8}{19}$$
 . $(2)q = C_2^3 (\frac{16 \cdot 15 \cdot 4}{20 \cdot 19 \cdot 18}) = \frac{8}{19}$.

22.甲、乙、丙三人同射一目標靶,三人的命中率依次為 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$,且各人命中靶的事件為獨立事件,

則

- (1)若每人各射一發,則此靶恰中一彈的機率為_____.
- (2)若每人各射一發,則此靶中彈的機率為_____
- (3)若甲、乙兩人各發一發,則丙至少需射擊_______發子彈,方能使此靶中彈的機率大於 0.99 . (已知 $\log 2 \approx 0.3010$)

解答 $(1)\frac{11}{25};(2)\frac{21}{25};(3)5$

解析 (1)靶恰中一發,表示三人中恰有一人擊中靶的事件

故其機率 =
$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{11}{25}$$
.

(2)每人各射一發, 靶中彈表示三人中至少有一人擊中靶的事件

故所求機率 =
$$1 - P(三人均不中) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{21}{25}$$
.

(3)設丙發射 n 發,而甲、乙各發射一發,則靶中彈的機率為

$$1 - (\frac{1}{2})(\frac{4}{5})(\frac{2}{5})^n > 0.99 \Rightarrow \frac{4}{10}(\frac{2}{5})^n < 0.01 \Rightarrow (\frac{2}{5})^n < \frac{1}{40} \Rightarrow n\log\frac{2}{5} < -\log 40$$

$$\Rightarrow n(\log 4 - \log 10) < -(\log 4 + \log 10) \Rightarrow n > \frac{1 + 2\log 2}{1 - 2\log 2} \approx 4.03$$

故丙至少需射5發,方能使靶中彈的機率>0.99.

23.三整數 a, b, c 為偶數的機率分別為 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, 且彼此互不影響,則

(1)abc 為偶數的機率為 . (2)ab+c 為奇數的機率為

解答 $(1)\frac{23}{24};(2)\frac{1}{3}$

解析 (1)abc 為偶數表示 a, b, c 三者至少有一為偶數

故所求機率 = 1 - (a, b, c 均為奇數之機率) = $1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{23}{24}$.

(2)ab+c 為奇數的情形有兩類

$$①ab$$
 為偶數, c 為奇數,其機率為 $(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3})(\frac{1}{4})$

②
$$ab$$
 為奇數, c 為偶數,其機率為 $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3})(\frac{3}{4})$

故所求機率 =
$$(1 - \frac{1}{2 \times 3})(\frac{1}{4}) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{5+3}{24} = \frac{1}{3}$$
.

24.設一袋中有 3 紅球、7 白球,若某君平日說謊率 $\frac{1}{5}$,他隨機取一球,而他說他取到紅球,求他取到的球確為紅球的機率為_______.

解答 12

解析
$$P$$
(確實為紅球 | 某君說是紅球) = $\frac{P(某君說是紅球且確實為紅球)}{P(某君說是紅球)} = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{4}{5}}{\frac{3}{10} \times \frac{4}{5} + \frac{7}{10} \times \frac{1}{5}} = \frac{12}{19}$.

25.設有10題是非題,答對一題得一分,答錯一題倒扣一分,不答得零分.甲確定答對的有4題,其餘6題完全瞎猜,試問甲得分超過4分的機率是_____.

解答 $\frac{11}{32}$

解析 依題意,所求機率為
$$P$$
(瞎猜6題中答對4題或5題或6題) = $C_4^6 (\frac{1}{2})^6 + C_5^6 (\frac{1}{2})^6 + C_6^6 (\frac{1}{2})^6 = \frac{11}{32}$.

26.連續拋擲銅板10次,如果已經知道前面的4次中出現了偶數次正面,那麼全部10次拋擲中出現6次正面的條件機率為_____.

 \mathbb{F} 解答 $\frac{53}{256}$

解析 所求機率
$$p = \frac{C_0^4 C_6^6 (\frac{1}{2})^{10} + C_2^4 C_4^6 (\frac{1}{2})^{10} + C_4^4 C_2^6 (\frac{1}{2})^{10}}{C_0^4 (\frac{1}{2})^4 + C_2^4 (\frac{1}{2})^4 + C_4^4 (\frac{1}{2})^4} = \frac{53}{256}.$$

27.調查某新興工業都市的市民對市長施政的滿意情況,依據隨機抽樣,共抽樣男性 600 人、女性 400 人,由甲、乙兩組人分別調查男性與女性市民.調查結果男性中有 36%滿意市長的施政,女性市民中有 46%滿意市長的施政,則滿意市長施政的樣本佔全體樣本的百分比為______%.

解答 40

解析 所求=
$$\frac{600 \times \frac{36}{100} + 400 \times \frac{46}{100}}{600 + 400} = \frac{40}{100} = 40\%.$$

28.現今社會有毒添加劑盛行,常讓人在不知情的情況下受到傷害。現有 A、B 兩家飲料店皆只進貨甲、乙、丙三種原料,卻不知甲原料已遭受到有毒添加劑的汙染。已知 A、B 兩店在製作飲料時,每種飲料皆只使用甲、乙、丙三種原料中的一種。而在 A店,選到甲原料的機率為選到乙原料的兩倍,

選到丙原料的機率亦為選到乙原料的兩倍。在 B 店, 選到甲原料的機率為選到乙原料的一半, 也是 選到丙原料的一半。現有一人欲買一杯飲料, 選擇到 A 或 B 飲料店購買的機會相同,

- (1)則其購買的飲料遭受有毒添加劑汙染的機率為_____.
- (2)承(1), 此受有毒添加劑汙染的飲料來自 A 店之機率為_____.

解答
$$(1)\frac{3}{10};(2)\frac{2}{3}$$

解析

$$\frac{1}{2}A \begin{cases} \mathbb{P} \frac{2}{5} & \hat{\pi}_{\overline{b}} \\ \mathbb{Z} \frac{1}{5} \\ \mathbb{R} \frac{2}{5} \end{cases}, \frac{1}{2}B \begin{cases} \mathbb{P} \frac{1}{5} & \hat{\pi}_{\overline{b}} \\ \mathbb{Z} \frac{2}{5} \\ \mathbb{R} \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$(1)\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{10} . \qquad (2)\frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3} .$$