高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：102.05.13					
範圍	2-3 二項式定理	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 （每題 10 分 ）

1.$(3x-\frac{2}{3}y)^5$展開式中，求： (1)共有____________項． (2)其中 x^4y 的係數為____________．

解答 (1)6;(2)–270

解析 (1)$(3x-\frac{2}{3}y)^5$展開式中，一般項為$C_r^5 3^{5-r}(-\frac{2}{3})^r x^{5-r}y^r \Rightarrow$共 $H_5^2=C_5^6=C_1^6=6$ 項．

(2)x^4y 項係數為 $C_1^5(3)^4(\frac{-2}{3})^1=5\times3^4\times(\frac{-2}{3})=-270$， x^4y 係數為 -270．

2.$(x+\frac{2}{x^2})^{10}$展開式中，求： (1)x^4的係數為____________． (2)各項係數和為____________．

解答 (1)180;(2)3^{10}

解析 設在$(x+\frac{2}{x^2})^{10}$展開式中，一般項為 $C_r^{10}x^{10-r}(2\cdot x^{-2})^r=C_r^{10}\ 2^r x^{10-3r}$

$x^{10-3r}=x^4$，即 $10-3r=4$，$r=2$，

(1)x^4項的係數為 $C_2^{10}(2)^2=180$．

(2)$(x+\frac{2}{x^2})^{10}$的各項係數和 $=(1+\frac{2}{1})^{10}=3^{10}$．

3.(1)$(2x^2+\frac{3}{2x})^6$展開式中的常數項 =____． (2)$(2x^2-\frac{3}{2x})^6$展開式中，係數為負數的項共有_____項．

解答 (1)$\frac{1215}{4}$;(2)3

解析 (1)設$(2x^2+\frac{3}{2x})^6$展開式一般項為 $C_r^6\ (2)^{6-r}(\frac{3}{2})^r x^{12-3r}$，

$12-3r=0\Rightarrow r=4$，常數項為 $C_4^6(2)^2\cdot(\frac{3}{2})^4=\frac{1215}{4}$，

(2)係數 $C_r^6\ (2)^{6-r}(\frac{3}{2})^r x^{12-3r}$為負數的項為 r 為奇數項的個數，$r=1$，3，5，共 3 項是負．

4.設 a 為實數，$(ax^2+\frac{1}{x})^5$展開式中，x^4的係數為 80，則：(1)$a=$___．(2)展開式中係數的最大值為___．

解答 (1)2;(2)80

解析 (1)設$(ax^2+\frac{1}{x})^5$展開式中，一般項為 $C_r^5(ax^2)^{5-r}\cdot(\frac{1}{x})^r=C_r^5(a)^{5-r}x^{10-3r}$，

即 $10-3r=4$，得 $r=2$， 所以係數 $C_2^5a^3=80$，$a^3=8$，$a=2$．

(2)$(2x^2+\frac{1}{x})^5$展開式各項係數分別為 2^5，5×2^4，10×2^3，10×2^2，5×2，1，最大係數 80．

5.將$(1-x)+(1-x)^2+(1-x)^3+\cdots+(1-x)^{20}$乘開合併同類項後，則：

(1)x^2的係數為____________． (2)x^4的係數為____________．

解答 (1)1330;(2)20349

解析 (1)$(1-x)+(1-x)^2+\cdots+(1-x)^{20}=\dfrac{(1-x)[1-(1-x)^{20}]}{1-(1-x)}=\dfrac{(x-1)^{21}-x+1}{x}$,

其中，x^2 項的係數就是 $(x-1)^{21}$ 中 x^3 項的係數，

此項為 $C_3^{21}\cdot(-1)^{18}x^3$，因此，$x^2$ 係數為 $C_3^{21}=1330$.

(2)x^4 項係數即 $(x-1)^{21}$ 中 x^5 項的係數為 $C_{16}^{21}(-1)^{16}$，x^4 係數為 $C_5^{21}=20349$.

6.$(1+x+y^2)^8$ 展開式中，求： (1)x^6 的係數為__________ . (2)x^2y^8 的係數為__________ .

解答 (1)28;(2)420

解析 (1)$(1+x+y^2)^8$ 一般項 $\dfrac{8!}{p!q!r!}1^p\cdot x^q\cdot(y^2)^r$，其中 $p+q+r=8$

求 x^6 項係數時，取 $p=2,q=6,\ r=0$，即 $\dfrac{8!}{2!6!0!}=28$.

(2)求 x^2y^8 項係數時，取 $p=0,q=2,\ r=4$，即 $\dfrac{8!}{0!2!4!}=420$.

7.在 $(2-\dfrac{3}{x}+4x^2)^4$ 之展開式中，(1)常數項為__________ . (2) x^3 項之係數為__________ .

解答 (1)880;(2)–1152

解析 $(2-\dfrac{3}{x}+4x^2)^4=\displaystyle\sum_{\substack{p+q+r=4\\0\le p,\ q,\ r\le 4}}\dfrac{4!}{p!q!r!}2^p(-\dfrac{3}{x})^q(4x^2)^r$

$$=\sum_{\substack{p+q+r=4\\0\le p,\ q,\ r\le 4}}\frac{4!}{p!q!r!}2^p(-3)^q4^rx^{-q+2r},$$

(1)$\begin{cases}p+q+r=4\\-q+2r=0\end{cases}$，∴ $\begin{array}{c|c|c}p&4&1\\q&0&2\\r&0&1\end{array}$，∴ $\dfrac{4!}{4!}2^4+\dfrac{4!}{1!2!1!}2\cdot(-3)^2\cdot4=880$.

(2)$\begin{cases}p+q+r=4\\-q+2r=3\end{cases}$，∴ $\begin{array}{c|c}p&1\\q&1\\r&2\end{array}$，∴ $\dfrac{4!}{1!1!2!}2\cdot(-3)\cdot4^2=-1152$.

8.$(x+y)^n$ 的展開式中，

(1)第 10 項與第 13 項之係數相等，則 $n=$____ . (2)若有三連續項的係數比為 2∶3∶4，則 $n=$______ .

解答 (1)21;(2)34

解析 (1)$C_9^n=C_{12}^n$，∴ $n-9=12$ ⇒ $n=21$.

(2)$C_{k-1}^n:C_k^n:C_{k+1}^n=2:3:4$

$$\Rightarrow\begin{cases}2C_k^n=3C_{k-1}^n\\3C_{k+1}^n=4C_k^n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2\cdot n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{3\cdot n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\\\dfrac{3\cdot n!}{(k+1)!(n-k-1)!}=\dfrac{4\cdot n!}{k!(n-k)!}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2n-2k+2=3k\\3n-3k=4k+4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=34\\k=14\end{cases}.$$

9.以 $(x-1)^2$ 除 $x^{11}-x+2$，其餘式為__________ .

解答 $10x-8$

解析 $x^{11}-x+2=[(x-1)+1]^{11}-x+2=C_0^{11}(x-1)^{11}+\cdots+C_{10}^{11}(x-1)+C_{11}^{11}-x+2$，

$\therefore$ 餘式 $=C_{10}^{11}(x-1)+C_{11}^{11}-x+2=11(x-1)+1-x+2=10x-8$．

10.計算$(0.98)^4$，取到小數點後第 4 位（第 5 位四捨五入）得到____________．

解答 0.9224

解析 $(0.98)^4=(1-0.02)^4=\sum_{k=0}^{4}C_k^4 1^{4-k}\ (-0.02)^k\ =1-4\,(0.02)+6\,(0.02)^2-4\,(0.02)^3+(0.02)^4$

$=1-0.08+0.0024-0.000032+0.00000016=0.92236816\approx 0.9224$．

11.試求$\sum_{k=0}^{10}(1-x)^k$ 展開式中 x^5 項的係數____________．

解答 -462

解析 $\sum_{k=0}^{10}(1-x)^k=1+(1-x)+(1-x)^2+(1-x)^3+\cdots+(1-x)^{10}$

$=\dfrac{1\cdot[(1-x)^{11}-1]}{(1-x)-1}=\dfrac{(1-x)^{11}-1}{-x}=\dfrac{(x-1)^{11}+1}{x}$，

則原展開式中 x^5 項係數 $=(x-1)^{11}$ 展開式中 x^6 之係數 $=C_6^{11}(-1)^5=-462$．

12.$a\in\mathbb{R}$，設$(ax^2-\dfrac{1}{x})^5$展開式中，x^4 項係數為 270，求 $\dfrac{1}{x^2}$ 項係數為____________．

解答 15

解析 $C_2^5(ax^2)^3(-\dfrac{1}{x})^2=10a^3x^4$，$10a^3=270$，$\therefore\ a=3$，

$[3x^2+(\dfrac{-1}{x})]^5\ \Rightarrow\ C_4^5(3x^2)^1(-\dfrac{1}{x})^4=15\dfrac{1}{x^2}$，所求係數 $=15$．

13.$(3x-\dfrac{1}{9\sqrt{x}})^{12}$的展開式中，試求：(1) x^2 項的係數為____________． (2) x^6 項的係數為____________．

解答 (1)0;(2)495

解析 $(3x-\dfrac{1}{9\sqrt{x}})^{12}=[3x-\dfrac{1}{9}x^{-\frac{1}{2}}]^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_k^{12}(3x)^{12-k}(-\dfrac{1}{9}x^{-\frac{1}{2}})^k=\sum_{k=0}^{12}C_k^{12}(3)^{12-k}(-\dfrac{1}{9})^kx^{12-\frac{3}{2}k}$，

(1)$12-\dfrac{3}{2}k=2\ \Rightarrow\ k=\dfrac{20}{3}$，但 $k\in\mathbb{N}$，$\therefore$ 沒有此項，即 x^2 項係數為 0．

(2) $12-\dfrac{3}{2}k=6\ \Rightarrow\ k=4$，$x^6$ 項係數為 $C_4^{12}\cdot 3^8(-\dfrac{1}{9})^4=495$．

14.$(x+y+z+u)^{10}$ 展開式中，

(1)所有不同類項共有________項．(2) $x^3y^3z^2u^2$ 項的係數為________．(3) $x^4y^3z^3$ 的同型項共有________項．

解答 (1)286;(2)25200;(3)12

解析 (1)展開式中一般項為 $\dfrac{10!}{a!b!c!d!}x^ay^bz^cu^d$，其中 $a+b+c+d=10$，

a，b，c，d 為非負整數，故有 $H_{10}^4=C_{10}^{13}=286$ 項．

(2)$x^3y^3z^2u^2$ 項之係數 $=\dfrac{10!}{3!3!2!2!}=25200$．

(3)$x^4y^3z^3$ 的同型項共有 $C_3^4\times\dfrac{3!}{2!}=12$ 項．

15.若 $2000 < C_1^n + C_2^n + C_3^n + \cdots + C_n^n < 3000$，則正整數 n 之值 $=$＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答　11

解析　$\because \quad C_0^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n + \cdots + C_n^n = 2^n$

$\Rightarrow \quad 2000 < 2^n - 1 < 3000 \quad \Rightarrow \quad 2001 < 2^n < 3001$，

$\because \quad 2^{10} = 1024$，$2^{11} = 2048$，$2^{12} = 4096$，故 $n = 11$．

16.求 $1 + \frac{1}{3}C_1^n + \frac{1}{9}C_2^n + \cdots + \frac{1}{3^n}C_n^n =$＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答　$(\frac{4}{3})^n$

解析　$1 + \frac{1}{3}C_1^n + \frac{1}{9}C_2^n + \cdots + \frac{1}{3^n}C_n^n$

$= C_0^n 1^n + C_1^n 1^{n-1} \cdot \frac{1}{3} + C_2^n 1^{n-2} \cdot (\frac{1}{3})^2 + \cdots + C_n^n (\frac{1}{3})^n = (1 + \frac{1}{3})^n = (\frac{4}{3})^n$．

17.若 $C_5^m = C_3^m$，則 $C_0^m + C_1^m + C_2^m + \cdots + C_m^m =$＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答　256

解析　若 $C_5^m = C_3^m$，則 $m = 5 + 3 = 8$，　$(1 + x)^8 = C_0^8 + C_1^8 x + C_2^8 x^2 + \cdots + C_8^8 x^8$，

設 $x = 1 \quad \Rightarrow \quad C_0^8 + C_1^8 + C_2^8 + \cdots + C_8^8 = 2^8 = 256$．

18.設 $n = 11^{15}$，則 n 的百位數字與十位數字之和為＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答　11

解析　$n = 11^{15} = (1 + 10)^{15} = 1 + C_1^{15} \times 10 + C_2^{15} \times 10^2 + \cdots + C_{15}^{15} \times 10^{15}$

$= 1 + 150 + 10500 + \cdots + 10^{15}$，

故百位數字為 6，十位數字為 5，$\therefore$ 和 $= 6 + 5 = 11$．

19.$n \in \mathbb{N}$ 且 $C_1^n + 2C_2^n + 3C_3^n + \cdots + nC_n^n = 11264$，求 $n =$＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答　11

解析　令 $S = C_1^n + 2C_2^n + 3C_3^n + \cdots + (n-1)C_{n-1}^n + nC_n^n$，

倒寫：$S = nC_0^n + (n-1)C_1^n + (n-2)C_2^n + \cdots + C_{n-1}^n$，

兩式相加得 $S + S = n(C_0^n + C_1^n + \cdots + C_n^n) = n \cdot 2^n$，

$\therefore \quad S = n \cdot 2^{n-1} = 11264 = 2^{10} \cdot 11 \quad \Rightarrow \quad n = 11$．

20.$(1 + x)(2 + x)(3 + x) \cdot \cdots \cdot (10 + x)$展開式中，$x^8$ 項的係數 $=$＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答　1320

解析　x^8 的係數為 10 個括號中有 8 個括號取 x，另 2 個括號取常數，故其係數為

$(1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + \cdots + 1 \cdot 10) + (2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \cdots + 2 \cdot 10) + (3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + 3 \cdot 10) + \cdots + (8 \cdot 9 + 8 \cdot 10) + (9 \cdot 10)$

$= [(1 + 2 + 3 + \cdots + 10)^2 - (1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2)] \times \frac{1}{2} = (55^2 - \frac{10 \times 11 \times 21}{6})\frac{1}{2} = 1320$．

21.求$(2x - 1)^4(x + 3)^5$ 展開式中，x^7 項之係數為＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答　984

解析　$(2x - 1)^4(x + 3)^5 = [(-1) + 2x]^4(3 + x)^5$

$$= [\sum_{\alpha=0}^{4} C_\alpha^4 (-1)^{4-\alpha}(2x)^\alpha][\sum_{\beta=0}^{5} C_\beta^5 3^{5-\beta} x^\beta] = [\sum_{\alpha=0}^{4}\sum_{\beta=0}^{5} C_\alpha^4 C_\beta^5 (-1)^{4-\alpha} 2^\alpha 3^{5-\beta}] x^{\alpha+\beta}$$

$\alpha+\beta=7 \quad \Rightarrow \quad (\alpha，\beta)=(2，5)，(3，4)，(4，3)$，

$\therefore \quad C_2^4C_5^5(-1)^2 2^2 3^0+C_3^4C_4^5(-1)2^3 3+C_4^4C_3^5(-1)^0 2^4 3^2=24-480+1440=984$．

22.(1，2，3)，(4，5，6，7)，(8，9，10，11，12)，⋯，(43，44，45，⋯，52)，則由此 52 個數中，任取二相異數不在同一括號內的情形共有____________種．

解答 1162

解析 所求 = 全部 −(二數在同一組)

$= C_2^{52}-(C_2^3+C_2^4+C_2^5+C_2^6+\cdots+C_2^{10})$

$= C_2^{52}-(C_3^3+C_2^3+C_2^4+C_2^5+C_2^6+\cdots+C_2^{10}-C_3^3)$

$= C_2^{52}-(C_3^4+C_2^4+C_2^5+\cdots+C_2^{10}-C_3^3)$

$= C_2^{52}-(C_3^5+C_2^5+\cdots+C_2^{10}-C_3^3)$

$= \cdots=C_2^{52}-(C_3^{10}+C_2^{10}-1)$

$=C_2^{52}-(C_3^{11}-1)=1326-164=1162$．

23.級數 $C_0^2+C_1^3+C_2^4+C_3^5+C_4^6+\cdots+C_{18}^{20}$ 之和 =____________．

解答 1330

解析 $C_0^2+C_1^3+C_2^4+C_3^5+\cdots+C_{18}^{20}=C_0^3+C_1^3+C_2^4+C_3^5+\cdots+C_{18}^{20}$

$=C_1^4+C_2^4+C_3^5+\cdots+C_{18}^{20}$

$=C_2^5+C_3^5+\cdots+C_{18}^{20}$

$=\cdots=C_{18}^{21}=C_3^{21}=1330$．

24.11^{15} 乘開後，(1)個位數字為____________，(2)十位數字為____________，(3)百位數字為____________．

解答 (1)1;(2)5;(3)6

解析 $11^{15}=(1+10)^{15}=\sum_{k=0}^{15}C_k^{15}10^k$

$=1+C_1^{15}10+C_2^{15}(10)^2+C_3^{15}10^3+\cdots+C_{15}^{15}10^{15}$

$=1+150+10500+1000(C_3^{15}+\cdots+C_{15}^{15}10^{12})$

$=10651+1000(C_3^{15}+\cdots+C_{15}^{15}10^{12})$，

故(1)個位數字 1，(2)十位數字 5，(3)百位數字 6．

25.在 $(2x+\dfrac{1}{2})^5$ 展開式各項中，係數最大之值為____________．

解答 40

解析 $(\dfrac{1}{2}+2x)^5$ 展開式中 x^k 項為 $C_k^5(\dfrac{1}{2})^{5-k}(2x)^k=C_k^5 2^{k-5}2^k x^k=C_k^5\cdot 2^{2k-5}\cdot x^k$，

令 x^k 項係數最大，$\dfrac{C_k^5 2^{2k-5}}{C_{k+1}^5 2^{2k-3}}-1=\dfrac{k+1}{4(5-k)}-1=\dfrac{5k-19}{4(5-k)}$，

當 $5k-19\ge 0$ 得 $k=4$ 時，$C_4^5 2^{8-5}x^4=40x^4$，

又 $k=5$ 時，$C_5^5 2^5 x^5=32x^5$，

$k=3$ 時，$C_3^5 2x^3=20x^3$，

故係數最大的值是 40．

26.在 $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{5})^{200}$ 展開式中，為有理數的項數共有____________項．

解答 51

解析 $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{5})^{200}=\sum_{r=0}^{200}C_r^{200}(\sqrt{2})^r\cdot(\sqrt[4]{5})^{200-r}$，

有理數項，則 $r=2m$，$200-r=4n$，m，n 為非負整數，且 $2m+4n=200\Rightarrow m+2n=100$，

$\therefore(m，n)$的解有 $n=0$，1，⋯，50 共 51 個，即有理數的項數共有 51 項．

27.以 $(x-1)^2$ 除 $x^{11}-x+2$，其餘式為____________．

解答 $10x-8$

28.設 n 為自然數，若 $C_0^n+\frac{1}{2}C_1^n+\frac{1}{3}C_2^n+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{4095}{n+1}$，則 $n=$____________．

解答 11

解析 左式 $=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_k^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}C_{k+1}^{n+1}=\frac{1}{n+1}(C_1^{n+1}+C_2^{n+1}+\cdots+C_{n+1}^{n+1})=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)=\frac{1}{n+1}\cdot4095$，

$\therefore 2^{n+1}-1=4095$，$2^{n+1}=4096$，$n=11$．