| 高雄市明誠中學 高一數學平時測驗　　日期：102.05.08 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 範圍 | 2-2 排列組合(B) | 班級 | 一年____班 | 姓名 | |
| | | 座號 | | | |

## 一、填充題 （每題 10 分 ）

1.編號 1 至 9 號之球共九個，

(1)取三球其乘積為偶數，取法有____________種．

(2)取三球其任二球號不為連續整數，取法有____________種．

(3)至少取一球，組合個數為____________．

(4)九個球平分成三堆之方法有____________種．

解答　(1)74;(2)35;(3)511;(4)280

解析　(1) 三球其乘積為偶數=全－三奇

9 個球取 3，共 $C_3^9$ 種取法，5 個奇數球取 3，共 $C_3^5$ 種取法，共 $C_3^9-C_3^5=74$ 種．

(2)9 個球取 3 個，有 6 個空位，可視為 6 個空位的前後共 7 個間隔任取 3 個，

$\therefore$ 共 $C_3^7=35$ 種取法．

(3)9 個球取或不取，共 $2^9$ 種取法，全部都不取，只有 1 種取法， $\therefore$ 共 $2^9-1=511$ 種取法．

(4)9 個球依序取 3 個、3 個、3 個，共 $C_3^9C_3^6C_3^3$ 種取法，三堆球沒有順序問題，

$\therefore$ 共 $\dfrac{C_3^9C_3^6C_3^3}{3!}=280$ 種取法．

2.投擲 5 個相同骰子，共有____________種不同的點數組合．

解答　252

解析　Sol 一

①五同：組合數有 $C_1^6=6$ 種．

②四同一異：組合數有 $C_2^6\times 2=30$ 種．

③三同二同：組合數有 $C_2^6\times 2=30$ 種．

④三同二異：組合數有 $C_3^6\times 3=60$ 種．

⑤二同三異：組合數有 $C_4^6\times 4=60$ 種．

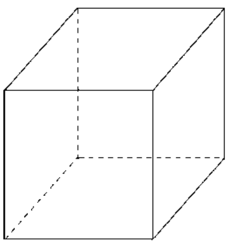
⑥二同二同一異：組合數有 $C_3^6\cdot\dfrac{3!}{2!}=60$ 種．

⑦五異：組合數有 $C_5^6=6$ 種．

$\therefore$ 組合數共有 $6+30+30+60+60+60+6=252$ 種．

Sol 二

六種點數共出現 5 次 $H_5^6=C_5^{6+5-1}=C_5^{10}=252$



3.正立方體的八個頂點可決定(1)____________個三角形．(2)____________個平面．

解答　(1)56;(2)20

解析　(1)正立方體的 8 個頂點均無三點共線者，$\therefore$三角形個數 $=C_3^8=56$ 個．

(2) 8 個頂點中四點共面者有 12 種，

$\therefore$ 決定平面的個數 $=C_3^8-12\times C_3^4+12=20$ 個．

4.警報器長鳴一次須 3 秒，短鳴一次須 1 秒，鳴叫之間間隔 2 秒，則 30 秒可作成______種不同的信號．

**解答** 80

**解析** 設長鳴 $x$ 次，短鳴 $y$ 次，則間隔有 $x+y-1$ 次 $\Rightarrow$ $3x+y+2(x+y-1)=30 \Rightarrow 5x+3y=32$，

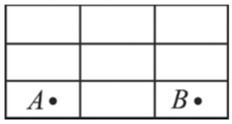
$\begin{array}{c|c|c} x & 1 & 4 \\ \hline y & 9 & 4 \end{array}$，有 $\dfrac{10!}{1!9!}+\dfrac{8!}{4!4!}=10+70=80$ 種．

5.滿足 $6 \le x+y+z \le 12$ 之非負整數解，$x$，$y$，$z$ 共有__________組．

**解答** 399

**解析** 所求 $=(x+y+z\le 12)-(x+y+z\le 5)=(x+y+z+t=12)-(x+y+z+t=5)$

$=H^4_{12}-H^4_5=C^{15}_3-C^8_3=455-56=399$．




6.如圖中至少包含 $A$ 或 $B$ 兩點之一的長方形共有__________個．

**解答** 15

**解析** 包含 $A$ 點的長方形有 $C^3_1\times C^3_1=9$，

包含 $B$ 點的長方形有 $C^3_1\times C^3_1=9$，

包含 $A$，$B$ 的長方形有 $C^3_1=3$，

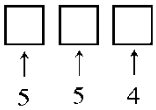
包含 $A$ 或 $B$ 者＝(含 A)＋(含 B)－(含 A 且 B)＝ $9+9-3=15$ 個．

7.用 0，1，2，3，4，5 等六個數字所排成的三位數中，求：

(1)數字不重複者共有__________個． (2)其中可被 3 整除者共有__________個．

**解答** (1)100;(2)40

**解析** (1)




三位數中百位不可填「0」，百位有 5 種填法，

十位可填「0」，又數字不重複，十位有 5 種填法， 個位有 4 種填法，

∴ 數字不重複的三位數有 $5\times 5\times 4=100$ 個．

(2)將數字分成：$3k$，$3k+1$，$3k+2$ 三類，

（$3k$ 有 0，3）；（$3k+1$ 有 1，4）；（$3k+2$ 有 2，5，）

∵ 數字和為 3 的倍數 $\Leftrightarrow$ 此三位數可被 3 整除，

∴ 每類各取一數作三位數的方法有：

① $3k$ 類取「0」，其餘兩類各取一個，∴ 所作三位數有 $C^2_1\times C^2_1\times 2\times 2\times 1=16$ 個．

② $3k$ 類取「3」，其餘兩類各取一個，∴ 所作三位數有 $C^2_1\times C^2_1\times 3\,!=24$ 個．

故三位數中被 3 整除者有 $16+24=40$ 個．

8.從 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11 等 11 個數中任取 3 個相異數，

(1)取出的 3 數成等差數列（不考慮排列）的取法有__________種．

(2)取出的 3 數，他們都是不相鄰整數的取法有__________種．

**解答** (1)25;(2)84

**解析** ( 取 3 數成等差 )＝（取二數，其和為偶數）（∵ $x$，$y$，$z$ 成等差 $\Leftrightarrow$ $x+z=2y$ ），

(1)二奇 ＋ 二偶 ＝ $C^6_2+C^5_2=15+10=25$ ．

(2)先放沒取出的 8 數得 9 空隙（如圖），

∨◯∨◯∨◯∨◯∨◯∨◯∨◯∨◯∨

取出的 3 數放入空隙，其法 $C^9_3=84$，保證此三數不相鄰．

9.$a$，$b$，$c$，$d$ 等 4 位男生和 $e$，$f$，$g$ 等 3 位女生共 7 人排成一列，求恰有一位女生排在 $a$ 之左側（不

一定相鄰）之排法有____________種．

解答 1260

解析 將 $a$，$e$，$f$，$g$ 視為同物，以□□□□表之，和 $b$，$c$，$d$ 排一列，

$b$□□$c$□$d$□

↓

此處放 $a$，其餘□□□放 $e$，$f$，$g$ $\Rightarrow$ $3!=6$

$\Rightarrow$ $\dfrac{7!}{4!}=210$，今恰一女生排在 $a$ 之左，所求 $=210\times 6=1260$．

10.設 $x$，$y$，$z$，$t\in\mathbb{N}$，則 $x+y+z+t^2=10$ 有____________組解．

解答 38

解析 $t=1$ 時，$x+y+z=9$，有 $H^3_{9-3}=H^3_6=C^8_6=C^8_2=28$ 組，

$t=2$ 時，$x+y+z=6$，有 $H^3_{6-3}=H^3_3=C^5_3=10$ 組，

$\therefore$ 共有 $28+10=38$ 組．

11.有 6 件不同的玩具，分給甲、乙、丙三位兒童，則：

(1)任意分，每人可兼得的分法有____________種．

(2)甲分得 4 件，乙、丙各分得 1 件的分法有____________種．

(3)乙、丙二人至少各分得 1 件的分法有____________種．

解答 (1)729;(2)30;(3)602

解析 (1)任意分，每一件玩具可分給甲、乙、丙任一人，分法有 3 種，$\therefore$所有分法有 $3^6=729$ 種．

(2)先將 6 件玩具，任意排列後，再將甲甲甲甲乙丙排在其位置上，

排到甲表該件玩具分給甲，$\therefore$ 分法有 $\dfrac{6!}{4!1!1!}=30$ 種．

(3)乙、丙至少各得 1 件的分法 $=$ 所有分法 $-$(乙沒有或丙沒有)

$=3^6-(2^6+2^6-1^6)=729-127=3^6-C^2_1\cdot 2^6+C^2_2\cdot 1^6=602$．

12.將「*pallmall*」一字中，所有字母全取而排列之，依下列條件，求其排列數，

(1)所有 $\ell$ 均相鄰____________．(2) $\ell$ 均不相鄰____________．(3)同字母不相鄰____________．

解答 (1)60 種;(2)60 種;(3)54 種

解析 (1)4 個 $\ell$ 相鄰視為一個字母，有 $\dfrac{5!}{2!}=60$ 種．

(2) $\vee\ p\ \vee\ a\ \vee\ m\ \vee\ a\ \vee$

$\dfrac{P^5_4}{4!}\times\dfrac{4!}{2!}=60$（種）．

└→ *pama* 之排法

└→ $\ell$ 插入「∨」中之排法

(3)即 $\ell$ 不相鄰且 $a$ 不相鄰 $=$ $\boxed{\ell\text{ 不相鄰}}$ $-$ $\boxed{\ell\text{ 不相鄰，}a\text{ 相鄰}}$．

$\vee\ p\ \vee\ m\ \vee\ \boxed{aa}\ \vee$

$\ell$ 不相鄰且 $a$ 相鄰有 $\dfrac{P_4^4}{4!}\times 3! = 6$ 種，故所求 $= 60-\dfrac{P_4^4}{4!}\times 3! = 54$（種）.

13.一至二樓有 8 級樓梯，某人上樓，每次可跨 1 級或 2 級，則其不同上樓的方法有________種．

解答　34

解析　設一級跨了 $x$ 次，2 級跨了 $y$ 次，則 $x+2y=8 \Rightarrow$

| $x$ | 8 | 6 | 4 | 2 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

，

有 $1+\dfrac{7!}{6!}+\dfrac{6!}{2!4!}+\dfrac{5!}{2!3!}+\dfrac{4!}{4!}=1+7+15+10+1=34$ 種．

14.將 20 個梨分給甲、乙、丙三個人，求下列各情況的分法數：

(1)每個人至少一個，有______種分法．(2)甲至少 1 個，乙至少 2 個，丙至少 3 個，有______種分法．

解答　(1)171;(2)120

解析　(1)先給三人每人 1 個，剩下 17 個梨任意分給三人，

分法有 $H_{20-1-1-1}^3 = C_{17}^{3+17-1} = C_{17}^{19} = C_2^{19} = 171$ ．

(2)先給甲、乙、丙各 1, 2, 3 個後剩下 14 個梨任意分給三人，

分法有 $H_{20-1-2-3}^3 = C_{14}^{3+14-1} = C_{14}^{16} = C_2^{16} = 120$ ．

15.有紅、黃、藍、綠四種顏色的球各兩個，且大小均相同，求下列情況的方法數？

(1)任取四個球的方法數為________種．(2)任取四個球之後，再將它們排成一列的排法有______種．

解答　(1)19;(2)204

解析　以 $aabbccdd$ 代表 8 個球．

(1)①兩同兩同取法有 $C_2^4=6$ 種，

②兩同兩異取法有 $C_1^4\times C_2^3=12$ 種，

③四異取法有 $C_4^4=1$ 種，

故共有 $6+12+1=19$ 種取法．

(2)由(1)各種取法，再加以排列，則排法有 $6\times\dfrac{4!}{2!2!}+12\times\dfrac{4!}{2!}+1\times 4!=36+144+24=204$ 種．

16.由 100 到 999 的三位數 $abc$ 中，滿足 $c<b\le a$ 的共有________個．

解答　165

解析　(1) $c<b=a$ 有 $C_2^{10}=45$ 個．(2) $c<b<a$ 有 $C_3^{10}=120$ 個．共有 $45+120=165$ 個．

17.2 個梨子，3 個桃子，4 個橘子，任意分給甲，乙，丙三人，每人最少一個，有________種分法．

解答　723

解析　全部 $-$(其中一人沒有)$+$(其中二人沒有)$\Leftarrow$排容原理

$=H_2^3\times H_3^3\times H_4^3 - C_1^3(H_2^2\times H_3^2\times H_4^2)+C_2^3(H_2^1\times H_3^1\times H_4^1)$

$=6\times 10\times 15-3\times(3\times 4\times 5)+3(1\times 1\times 1)=900-180+3=723$（種）．

18.6 個不同玩具全部分給甲、乙、丙 3 人，每人至少 1 個之分法有________種．

解答　540

解析 (1)按(1，1，4)分 3 人 $\Rightarrow$ $\dfrac{C_1^6\cdot C_1^5\cdot C_4^4}{2!}\times 3!=90$．

(2)按(1，2，3)分 3 人 $\Rightarrow$ $C_1^6\cdot C_2^5\cdot C_3^3\times 3!=360$．

(3)按(2，2，2)分 3 人 $\Rightarrow$ $\dfrac{C_2^6\cdot C_2^4\cdot C_2^2}{3!}\times 3!=90$．

$\therefore$ 所求 $=90+360+90=540$．

19.有紅、白、黃三種大小一樣的正立方體積木各 20 個，從中取出 7 個積木，相同顏色堆在一起，一一重疊堆高，共有__________種堆法．

解答 129

解析 7 同：$C_1^3=3$，

6 同 1 異：$C_1^3\times C_1^2\times 2!=12$，

5 同 2 同：$C_1^3\times C_1^2\times 2!=12$，

5 同 2 異：$C_1^3\times C_1^2\times C_1^1\times\dfrac{3!}{2!}=18$，

4 同 3 同：$C_1^3\times C_1^2\times 2!=12$，

4 同 2 同 1 異：$C_1^3\times C_1^2\times C_1^1\times 3!=36$，

3 同 3 同 1 異：$C_1^3\times C_1^2\times C_1^1\times\dfrac{3!}{2!}=18$，

3 同 2 同 2 同：$C_1^3\times C_1^2\times C_1^1\times\dfrac{3!}{2!}=18$，

∴共有 3 + 12 + 12 + 18 + 12 + 36 + 18 + 18 = 129 種堆法．

20.自 CONSONANT 一字中，任取 3 個字母，設 $x$, $y$ 分表其排列數、組合數，則 $x-y=$__________．

解答 120

解析 NNN OO CSAT

| | 組合數：$y$ | 排列數：$x$ |
|---|---|---|
| 3 同 | 1 | 1 |
| 2 同 1 異 | $C_1^2C_1^5=10$ | $C_1^2C_1^5\cdot\dfrac{3!}{2!}=30$ |
| 3 異 | $C_3^6=20$ | $C_3^6\cdot 3!=120$ |
| | $y=31$ | $x=151$ |

$x-y=151-31=120$．

21.將 24 枝相同的鋼筆全部分給甲、乙、丙 3 個人，則每個人至少有一枝鋼筆且每個人拿到的鋼筆個數兩兩不相同的分法共有__________種．

解答 222

解析 每人先發一枝，剩 21 枝，全部分法有 $C_{21}^{3+21-1}=C_{21}^{23}=253$ 種．

$\begin{cases}\text{兩同一異}(xxy)：2x+y=21,\ \begin{array}{c|c|c} x & 0\sim6 & 8\sim10\\ \hline y & 21\sim9 & 5\sim1\end{array},\ \text{共}\ 10\times\dfrac{3!}{2!}=30\ \text{種}．\\ \text{三同}(xxx)：3x=21,\ \text{每人各 7 枝，共}\ 1\ \text{種}．\end{cases}$

∴共有 253 – 30 – 1 = 222 種．