高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：102.04.29					
範圍	2-2 排列組合	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1.從 1，2，…，20 中，任取相異三數，求：

(1)乘積是偶數者有____________種取法． (2)和是 3 的倍數者有____________種取法．

解答 (1)1020;(2)384

解析 (1)全 −(三數皆為奇數) $= C_3^{20} - C_3^{10} = 1140 - 120 = 1020$．

(2)分成 $A_1 = \{3，6，9，12，15，18\}$，

$A_2 = \{1，4，7，10，13，16，19\}$，

$A_3 = \{2，5，8，11，14，17，20\}$，

和是 3 的倍數有① A_1 取 3 個；② A_2 取 3 個；③ A_3 取 3 個；④ A_1，A_2，A_3 各取一個，

有 $C_3^6 + C_3^7 + C_3^7 + C_1^6 \cdot C_1^7 \cdot C_1^7 = 20 + 35 + 35 + 294 = 384$ 種取法．

2.將五件不同的玩具全部任意分給甲、乙、丙三人，每人不限制只分得一件，可多得亦可能一件都沒分到，試問：(1)有____種分配方法．(2)若甲、乙、丙三人每人至少得一件，則其分配方法有___種．

解答 (1)243;(2)150

解析 (1)$3^5 = 243$（種）．

(2)Sol 一：$1\times3^5 - 3\times2^5 + 3\times1^5 - 1\times0^5 = 150$

Sol 二：分法有(3，1，1)，(2，2，1)兩種，$\dfrac{C_3^5\ C_1^2\ C_1^1}{2!}\times3! + \dfrac{C_2^5\ C_2^3\ C_1^1}{2!}\times3! = 150$ 種．

3.「*tennessee*」一字中，求：

(1)各字母重排，有____________種排法． (2)若同字母須相鄰，有____________種排法．

解答 (1)3780;(2)24

解析 (1)$\dfrac{9!}{4!2!2!} = 3780$（種）（9 個字母中，有 4 個 e，2 個 n，2 個 s，1 個 t）．

(2)同於 t，e，n，s 全取排列數 $4! = 24$（種）．

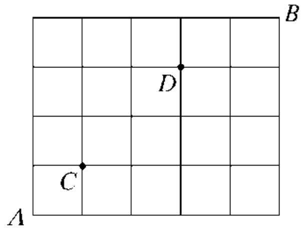
4.將 2 紅球，3 白球，4 黑球（球皆相同），求：

(1)若分給 9 人，有____________種分法． (2)若分給 11 人，有____________種分法．

解答 (1)1260;(2)69300

解析 (1)$\dfrac{9!}{2!3!4!} = 1260$（種）．(2)$\dfrac{11!}{2!3!4!2!} = 69300$（種）．

5.如圖，由 A 到 B 走捷徑，求：



(1)經過 C 點的走法有_______種． (2)經過 C 且不過 D 的走法有________種．

解答 (1)70;(2)34

解析 (1)$A \to C \to B \Rightarrow \dfrac{2!}{1!1!}\times\dfrac{7!}{4!3!} = 2\times35 = 70$．

(2)經過 C 且不過 D = (經過 C) − (經過 C 且經過 D) $= 70 - \dfrac{2!}{1!1!}\times\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{3!}{2!1!} = 70 - 36 = 34$．

6.有 9 件相同物分給甲、乙、丙三人，求：

(1)其中有一人至少得一件，一人至少得二件，另一人至少得三件，則分法有____________種．

(2)每人至少分得一件的分法有＿＿＿＿＿＿種．

解答　(1)25;(2)28

解析　(1)物品相同，只須考慮個數的安排，

個數安排方法有(6，2，1)，(5，3，1)，(5，2，2)，(4，3，2)，(4，4，1)，(3，3，3)，

$\therefore$　分法有 $3!+3!+\dfrac{3!}{2!}+3!+\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{3!}=25$．

(2)每人均至少一件，又物品相同，

甲、乙、丙三人各取一件，餘 6 件相同物任意分給三人，不限個數，

$\therefore$　分法有 $H^{3}_{9-1-1-1}=C^{8}_{6}=28$．

7.甲、乙、丙、丁、戊、己、庚 7 人排成一列，則：

(1)甲、乙、丙相連有＿＿＿＿＿＿種排法．

(2)甲、乙、丙完全分開有＿＿＿＿＿＿種排法．

解答　(1)720;(2)1440

解析　(1)先把甲、乙、丙看成一人作排列後，甲、乙、丙再排列，則有 $5!\times 3!=720$ 種排法．

(2)先排丁、戊、己、庚，甲、乙、丙再排入其 5 個間隔中，則有 $4!\times P^{5}_{3}=1440$ 種排法．

8.在數線上有一個運動物體從原點出發，在此數線上跳動，每次向正方向或負方向跳 1 個單位，跳動過程可重複經過任何一點．若經過 8 次跳動後運動物體落在點 +2 處，則此運動物體共有＿＿＿＿＿＿種不同的跳動方法．

解答　56

解析　設向右方向跳 x 次，向左方向跳 y 次，$\begin{cases}x+y=8\\0+x-y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5\\y=3\end{cases}\Rightarrow\dfrac{8!}{5!3!}=56$．

9.以汽笛鳴放長短聲作信號，長音一次需時 2 秒，短音一次需時 1 秒，每次鳴放 1 次後間隔 1 秒再鳴放 1 次，若發射一信號需時 15 秒，則可作成＿＿＿＿＿＿種信號．

解答　37

解析　設在 15 秒內鳴放長音 x 次，短音 y 次，則間隔數為$(x+y-1)$次，

$\therefore$　$2x+y+(x+y-1)=15$　$\Rightarrow$　$3x+2y=16$，x，y 為非負整數　$\Rightarrow$　$\begin{cases}x=0,\ 2,\ 4\\y=8,\ 5,\ 2\end{cases}$，

故在 15 秒內所作信號有 $\dfrac{8!}{8!0!}+\dfrac{7!}{2!5!}+\dfrac{6!}{4!2!}=37$ 種．

10.樓梯有 12 階，一人上樓，一步一階或一步二階，走法有＿＿＿＿＿＿種．

解答　233

解析　設一步一階有 x 次，一步二階有 y 次，

則 $x+2y=12$，其中 x，y 為非負整數，故有下列情形：

① $\begin{cases}x=0\\y=6\end{cases}$　② $\begin{cases}x=2\\y=5\end{cases}$　③ $\begin{cases}x=4\\y=4\end{cases}$　④ $\begin{cases}x=6\\y=3\end{cases}$　⑤ $\begin{cases}x=8\\y=2\end{cases}$　⑥ $\begin{cases}x=10\\y=1\end{cases}$　⑦ $\begin{cases}x=12\\y=0\end{cases}$

$\therefore$走法有 $\dfrac{6!}{0!6!}+\dfrac{7!}{2!5!}+\dfrac{8!}{4!4!}+\dfrac{9!}{6!3!}+\dfrac{10!}{8!2!}+\dfrac{11!}{10!1!}+\dfrac{12!}{12!0!}=1+21+70+84+45+11+1=233$ 種．

11.某校辯論社由 5 名男生及 5 名女生組成．現從其中選出 5 人組成代表隊，且男生、女生均至少要有 1 人，則組隊方法共有＿＿＿＿＿＿種．

解答　250

解析　任意選，去除掉全部為男生與全部為女生，$C_5^{10}-2=250$．

12.設 n，m 為兩自然數，如果 $C_m^n : C_m^{n+1} : C_m^{n+2}=6:9:13$，則 $n=$＿＿＿＿＿＿．

解答　11

解析　$C_m^n : C_m^{n+1} : C_m^{n+2}=6:9:13$，

$$\frac{C_m^n}{C_m^{n+1}}=\frac{6}{9}，即\frac{\frac{n!}{m!(n-m)!}}{\frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!}}=\frac{2}{3}，即\frac{n+1-m}{n+1}=\frac{2}{3}，$$

$$\frac{C_m^{n+1}}{C_m^{n+2}}=\frac{9}{13}，即\frac{\frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!}}{\frac{(n+2)!}{m!(n+2-m)!}}=\frac{9}{13}，即\frac{n+2-m}{n+2}=\frac{9}{13}，$$

可得 $\begin{cases}3\,(n+1-m)=2\,(n+1)\\13\,(n+2-m)=9\,(n+2)\end{cases}$，即 $\begin{cases}n-3m=-1\\4n-13m=-8\end{cases}$，可得 $m=4$，$n=11$．

13.(1)方程式 $x+y+z+w=8$ 的正整數解有＿＿＿＿＿＿組．

(2)方程式 $x+y+z+2w=8$ 的正整數解有＿＿＿＿＿＿組．

解答　(1)35;(2)13

解析　(1)$x+y+z+w=8$ 的正整數解，有 $H_4^4=C_3^7=35$ 組．

(2)$x+y+z+2w=8$ 的正整數解，

① $w=1$ 時，$x+y+z=6$，有 $H_3^3=C_3^5=10$．

② $w=2$ 時，$x+y+z=4$，有 $H_1^3=C_1^3=3$．

共有 $10+3=13$ 組解．

14.將 6 本不同的書，分成 3 堆，求下列各種分法數．

(1)各堆分別有 1，2，3 本，有＿＿＿＿＿＿種．

(2)各堆分別有 1，1，4 本，有＿＿＿＿＿＿種．

(3)每堆各 2 本，有＿＿＿＿＿＿種．

(4)各堆分別有 1，2，3 本，再分給甲、乙、丙 3 人，每人一堆，有＿＿＿＿＿＿種．

(5)各堆分別有 1，1，4 本，再分給甲、乙、丙 3 人，每人一堆，有＿＿＿＿＿＿種．

(6)每堆各 2 本，再分給甲、乙、丙 3 人，每人一堆，有＿＿＿＿＿＿種．

解答　(1)60;(2)15;(3)15;(4)360;(5)90;(6)90

解析　(1) $C_1^6C_2^5C_3^3=60$．　(2) $\frac{C_1^6C_1^5C_4^4}{2!}=15$．　(3) $\frac{C_2^6C_2^4C_2^2}{3!}=15$．

(4) $C_1^6\cdot C_2^5\cdot C_3^3\times 3!=360$．　(5) $\frac{C_1^6C_1^5C_4^4}{2!}\times 3!=90$．　(6) $\frac{C_2^6C_2^4C_2^2}{3!}\times 3!=90$．

15.啦啦隊競賽規定每隊 8 人，且每隊男女生均至少要有 2 人，某班共有 4 名男生及 7 名女生想參加啦啦隊競賽，若此 11 人中依規定選出 8 人組隊，則共有＿＿＿＿＿＿種不同的組隊方法．

解答　161

解析　可能情形有三種，（男 2 女 6）或（男 3 女 5）或（男 4 女 4）

$=C_2^4\times C_6^7+C_3^4\times C_5^7+C_4^4\times C_4^7=42+84+35=161$ 種．

反面解法，全部方法 −（1 男 7 女）$=C_8^{11}-C_1^4C_7^7=165-4=161$ 種．

16.在數線上有一個運動物體從原點出發；在此數線上跳動，每次向正方向或負方向跳 1 個單位，跳動過程可重複經過任何一點，若經過 6 次跳動後運動物體落在點+4 處，則此運動物體共有__________種不同的跳動方法．

解答　6

解析　由題意知有 5 次正方向 1 次負方向，即+, +, +, +, +, −的直線排列 $\frac{6!}{5!}=6$ 種．

17.將 6 件物品放入 4 個箱子中，物品不同，箱子相同，每箱至少一個，有__________種放法．

解答　65

解析　先分箱：(1，1，1，3)，(1，1，2，2)，

故有 $C_1^6C_1^5C_1^4C_3^3\cdot\frac{1}{3!}+C_1^6C_1^5C_2^4C_2^2\cdot\frac{1}{2!2!}=20+45=65$ 種．

18.有 9 個兒童，

(1)分成三組，每組 3 人，有__________種分組．

(2)分成 A，B，C 三組，每組三人，有__________種分法．

解答　(1)280;(2)1680

解析　(1) $C_3^9\cdot C_3^6\cdot C_3^3\cdot\frac{1}{3!}=280$（種）．　(2) $C_3^9\cdot C_3^6\cdot C_3^3\cdot\frac{1}{3!}\cdot 3!=84\times 20\times 1=1680$（種）．

19.同時擲 5 粒相同的骰子，會出現__________種不同的點數．

解答　252

解析　設 1 點出現 x_1 次，⋯，6 點出現 x_6 次，$x_1+x_2+\cdots+x_6=5$，

其非負整數解的個數，即所求方法數 $=H_5^6=C_5^{10}=252$（種）．

20.明誠中學高二今年招收了甲、乙、丙、丁、戊、己 6 個轉學生，可編入 A、B、C 三個班，若每班至少編入 1 人且不得超過 3 人，問有多少編班的方法？________

解答　450

解析　(3，2，1)或(2，2，2)，$C_3^6\cdot C_2^3\cdot C_1^1\times 3!+\frac{C_2^6\cdot C_2^4\cdot C_2^2}{3!}\times 3!=450$．

21.由 tomorrow 八個字母中，任取四個字母，共有(1)__________種取法．(2)__________種排列法．

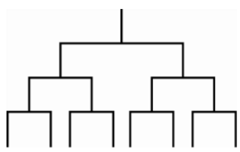
解答　(1)22　(2)286

解析　ooo　rr　tmw

情形	組合	排列
3 同 1 異	$C_1^1C_1^4=4$	$4\times\frac{4!}{3!}=16$
2 同 2 同	$C_2^2=1$	$1\times\frac{4!}{2!2!}=6$
2 同 2 異	$C_1^2\cdot C_2^4=12$	$12\times\frac{4!}{2!}=144$
全異	$C_4^5=5$	$5\times 4!=120$

∴　(1)組合 $4+1+12+5=22$．(2)排列 $16+6+144+120=286$．

22.已知甲、乙、丙、丁、⋯等八人，若此八人作桌球單打比賽，賽程表如圖所示，且



規定第一輪比賽甲、乙不能對打，則共有＿＿＿＿＿＿種安排賽程的方式．

解答 270

解析 全部－第一輪比賽甲、乙對打

共有 $(\dfrac{C_2^8\times C_2^6}{2!}\times\dfrac{C_2^4\times C_2^2}{2!})\times\dfrac{1}{2!}-C_2^2\times C_2^6\times\dfrac{C_2^4\times C_2^2}{2!}=315-45=270$ 種安排賽程的方式．

23.有 6 位學生打完球到福利社喝飲料，福利社有 3 種不同飲料，每位喝一瓶，由一人代表買飲料，則此人有＿＿＿種選擇飲料的方式．

解答 28

解析 從三種不同飲料選 6 瓶，∴　選法有 $H_6^3=C_6^8=28$ 種．

24.滿足 $x+y+z+u\le 10$ 之正整數解$(x，y，z，u)$共有＿＿＿＿＿＿組．

解答 210

解析 $x+y+z+u\le 10$，x，y，z，$u\in\mathbb{N}$

$\Leftrightarrow\quad x+y+z+u+t=10$，$x$，$y$，$z$，$u\in\mathbb{N}$，$t\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

$\Leftrightarrow\quad (x-1)+(y-1)+(z-1)+(u-1)+t=6$

$\Leftrightarrow\quad x'+y'+z'+u'+t=6$，$x'$，$y'$，$z'$，$u'$，$t\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，∴　$H_6^5=C_6^{10}=210$．

25.<u>台灣高鐵</u>從第一車到第十二車共有 12 節車廂．為了加強服務乘客，要指定其中四節車廂設置自動販賣機．求下列的指定方法數：

(1)若設置自動販賣機的四節車廂兩兩不相銜接，則共有＿＿＿＿＿種方法．

(2)若設置自動販賣機的四節車廂兩兩不相銜接且第六車為商務車廂必定設置，則共有＿＿＿種方法．

解答 (1)126; (2) 40

解析 (1) $C_4^{12-4+1}=C_4^9=126$

(2)

$\underline{1\ 2\ 3\ 4}\ \overset{\times}{5}\ \boxed{6}\ \overset{\times}{7}\ \underline{8\ 9\ 10\ 11\ 12}$

	0	3	$1\times C_3^3=1$種
取	1	2	$C_1^4\times C_2^4=24$種
	2	1	$C_2^3\times C_1^5=15$種

∴共 1 + 24 + 15 = 40 種．

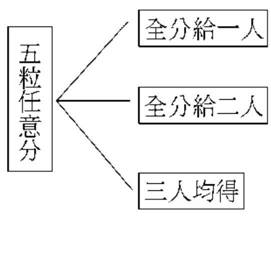
26.5 粒不同的糖果分給 3 個人，求：

(1)如果每個人分得的個數不限，有＿＿＿＿種方法．　(2)如果每個人至少一粒，有＿＿＿＿種方法．

解答 (1)243;(2)150

解析 (1)5 粒不同的糖果，任意分給 3 人，有 $3^5=243$ 種分法．

(2)SOL 一：如樹狀圖，



①全分給一人的分法，有 3 種，

②全分給二人的分法 $3\times(2^5-2)=90$，

每人均得到糖果的分法有 $3^5-(3+90)=150$ 種．

SOL 二：$1\times 3^5-3\times 2^5+3\times 1^5-1\times 0^5=150$

27.方程式 $x+y+z+u=16$ 中，滿足 $x\leq 4$，$y\leq 4$，$z\leq 5$，$u\leq 6$ 之正整數解有____________組．

解答 20

解析 設變數，$\begin{cases}4-x=x'\\4-y=y'\\5-z=z'\\6-u=u'\end{cases}$，則 $\begin{cases}0\leq x'\leq 3\\0\leq y'\leq 3\\0\leq z'\leq 4\\0\leq u'\leq 5\end{cases}$，且 $x'+y'+z'+u'=3$，其解有 $H_3^4=C_3^6=20$ 組．